

**Современный
Гуманитарный
Университет**

Дистанционное образование

0658.01.01;1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЮНИТА 1

МОСКВА 2001

Рекомендовано Министерством общего
и профессионального образования
Российской Федерации в качестве
учебного пособия для студентов
высших учебных заведений

КУРС: АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЮНИТА 1

Изложены основные понятия тем «Линии на плоскости и их уравнения. Прямая на плоскости», «Поверхности и их уравнения. Плоскость и прямая в пространстве», «Поверхности второго порядка. Их канонические уравнения».

Разобрано большое количество примеров. Многие понятия и примеры поясняются рисунками.

Для студентов Современного Гуманитарного Университета

Юнита соответствует профессиональной образовательной программе №1

ISBN 5-8323-0294-X

0658.001.01.99.01;1/11.13.Тир.27000

(С) СОВРЕМЕННЫЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, 1999

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН	стр. 4
ЛИТЕРАТУРА	5
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР	6
Введение. Основные идеи аналитической геометрии	6
Глава I. Линии на плоскости и их уравнения. Прямая на плоскости ...	7
§1. Уравнение прямой по точке и направляющему вектору (каноническое уравнение прямой)	8
§2. Уравнение прямой по точке и нормальному вектору	9
§3. Взаимное расположение двух прямых	11
§4. Пересечение двух прямых	12
§5. О линиях второго порядка	13
Глава II. Поверхности и их уравнения. Плоскость и прямая в пространстве	14
§1. Некоторые вспомогательные понятия. Определители. Векторное и смешанное произведения	15
§2. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки ...	18
§3. Прямая в пространстве	20
§4. Взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве	22
§5. Переход от одного способа задания прямой к другому	24
Глава III. Поверхности второго порядка. Их канонические уравнения .	26
§1. Канонические уравнения поверхностей	28
§2. Метод параллельных сечений	29
§3. Эллипсоид	29
§4. Однополостный гиперболоид	31
§5. Гиперболический параболоид	32
§6. Поверхности вращения. Двухполостный гиперболоид.	
Эллиптический параболоид. Конус	33
§7. Цилиндры второго порядка	36
§8. Линейчатые поверхности второго порядка	37
§9. Пересечение поверхности второго порядка с прямой и с плоскостью	37
§10. Преобразование декартовых прямоугольных координат в пространстве	39
§11. Приведение к каноническому виду уравнения поверхности второго порядка с помощью параллельного сдвига осей	42
§12. Приведение к каноническому виду уравнения поверхности второго порядка с центром в начале координат	43
§13. О приведении к каноническому виду общего уравнения поверхности второго порядка	46
§14. Конические сечения (коники)	47
ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ	49
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ	56
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ	59
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	80
ГЛОССАРИЙ*	

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Основные идеи аналитической геометрии. Методы векторной алгебры в аналитической геометрии.

Линии и их уравнения. Прямая на плоскости: направляющий вектор, нормальный вектор, взаимное расположение двух прямых.

Поверхности и их уравнения. Плоскость: уравнение плоскости по трем точкам, взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве, прямая как линия пересечения двух плоскостей. Переход от одного способа задания прямой к другому.

Поверхности второго порядка, их канонические уравнения. Метод параллельных сечений. Пересечение поверхности второго порядка с прямой и с плоскостью. Преобразование декартовых прямоугольных координат в пространстве. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду. Конические сечения.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. М., 1973.
или
- 2*. Керимова Д.Х. Математика. Базовый курс. Юнита 2. Аналитическая геометрия и элементы векторной алгебры. М., СГУ, 1999.

Дополнительная

- 3*. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М., 1969.
- 4*. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы. М., 1967.
- 5*. Бакельман И.Я. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М., 1976.
- 6*. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М., 1972.
- 7*. Цубербиллер О.И. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М., 1968.
8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., 1984.
- 9*. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., 1987.
10. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. М., 1968.
- 11*. Каган М.Л., Самохин М.В. Алгебра и геометрия в инженерном вузе. М., МГСУ, 1998.
12. Красовская И.А. Математика. Углубленный курс. Юнита 2. Элементы линейной алгебры. М., СГУ, 1999.

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Юнита 2 «Математика. Базовый курс. Аналитическая геометрия и элементы векторной алгебры», составленная Керимовой Д.Х. (в дальнейшем «Ю.2»), содержит материал, включающий основные понятия аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. В ней для изучения прямых и кривых второго порядка на плоскости, а также прямых и плоскостей в пространстве использовался, в основном, метод координат. Напомним, что этот метод позволяет решать геометрические задачи средствами алгебры.

Этот метод был впервые сформулирован и систематически применен в геометрии Р. Декартом - французским математиком XVII-го века. Суть его состоит в том, что на плоскости или в пространстве фиксируется система координат. В этой системе точке отвечает упорядоченный набор чисел - ее координаты, а линиям и поверхностям - уравнения или системы уравнений, которым удовлетворяют координаты точек этих геометрических фигур.

Так, на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат Оху окружность с центром в начале координат радиуса 2 задается уравнением $x^2 + y^2 = 2^2$, а биссектриса первого и третьего координатных углов - уравнением $y = x$.

Связь между уравнениями и линиями позволяет свести изучение геометрических свойств линий к исследованию аналитических свойств соответствующих им уравнений. То же можно сказать о поверхностях и уравнениях, им соответствующих.

Со временем наряду с методом координат в аналитической геометрии существенную роль стали играть методы векторной алгебры, которые мы и хотим продемонстрировать в этой работе.

Развитие векторной алгебры было вызвано потребностями механики и физики. Многие важные понятия (такие, как скорость, сила) не могут быть описаны с помощью лишь одной численной величины. Для этого пришлось ввести понятие **вектора** - направленного отрезка - и изучить целый ряд операций над векторами.

Настоящее учебное пособие состоит из трех глав. Первая глава в сжатой форме напоминает сведения из Ю.2, посвященные линиям и их уравнениям на плоскости; затем вводятся понятия направляющего и нормального векторов прямой на плоскости и выводятся уравнения прямой по точке и каждому из этих векторов.

Вторая глава в сжатой форме напоминает сведения из Ю.2, посвященные прямой и плоскости в пространстве. Выводится уравнение плоскости по трем точкам. Показан переход от одного способа задания прямой в пространстве к другому с использованием понятий направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости. Даются условия взаимного расположения прямой и плоскости на языке векторной алгебры.

Третья глава посвящена поверхностям второго порядка и их каноническим уравнениям. Форма некоторых из этих поверхностей исследуется методом параллельных сечений. Подчеркнем, что поверхность второго порядка задается уравнением второй степени относительно x , y , z , в какой бы декартовой системе координат Охуз эта поверхность ни рассматривалась. В то же время для получения «наиболее простого» (канонического) вида той или иной поверхности второго порядка совершается преобразование декартовых координат (перенос начала координат, поворот осей).

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

Сечения поверхностей второго порядка плоскостями оказываются кривыми второго порядка («кониками»), введенными другим способом в Ю.2.

Рассмотрено несколько примеров на пересечение поверхностей с прямой и с плоскостью.

ГЛАВА 1. ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ И ИХ УРАВНЕНИЯ. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим на плоскости некоторую линию L . Пусть на плоскости введена декартова система координат Oxy . Тогда линии L соответствует уравнение вида

$$F(x,y) = 0, \quad (1)$$

левая часть которого содержит переменные x и y .

Линия, определяемая уравнением $F(x, y) = 0$, есть геометрическое место точек плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Это означает, что уравнению (1) удовлетворяют координаты x и y каждой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.

Уравнение $F(x, y) = 0$ называется **уравнением данной линии**.

Входящие в это уравнение координаты x и y произвольной точки линии называются **текущими координатами**.

Уравнением первой степени относительно x , y называется уравнение вида

$$Ax + By + C = 0.$$

Здесь A , B , C - некоторые фиксированные числа, они называются коэффициентами данного уравнения. Численные значения коэффициентов могут быть какими угодно, но при условии, что A и B одновременно в нуль не обращаются (последнее требование можно выразить неравенством $A^2 + B^2 \neq 0$).

В декартовых координатах каждая прямая определяется уравнением первой степени и обратно, каждое уравнение первой степени определяет некоторую прямую.

Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$) называется общим уравнением прямой на плоскости Oxy .

Для приложений целесообразно иметь уравнения прямой в различных равносильных формах. Напомним ряд таких уравнений (см. Ю.2):

$y = kx + b$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом k ;

$y - y_0 = k(x - x_0)$ - уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_0, y_0) , с угловым коэффициентом k ;

$x = a$ - уравнение прямой, параллельной оси Ox ;

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (2)$$

- уравнение прямой, проходящей через две данные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) .

Каждое из этих уравнений, конечно, является уравнением первой степени.

Если k_1 - угловой коэффициент прямой L_1 , а k_2 - угловой коэффициент прямой L_2 , то условием параллельности прямых L_1 и L_2 является равенство их коэффициентов $k_1 = k_2$, а условием перпендикулярности L_1 и L_2 - равенство $k_1 \cdot k_2 = -1$.

§1. Уравнение прямой по точке и направляющему вектору (каноническое уравнение прямой)

Ненулевой вектор $\vec{a}$ называется **направляющим вектором** данной прямой (на плоскости или в пространстве), если он лежит на этой прямой или прямой, ей параллельной (рис. 1).

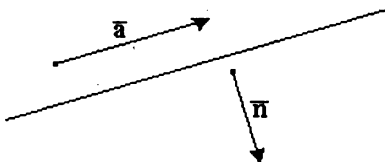


Рис. 1

Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ - две различные точки на данной прямой. Тогда вектор $\overline{M_1M_2}$ - один из ее направляющих векторов: $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Обозначим $x_2 - x_1 = l$, $y_2 - y_1 = m$, $\overline{M_1M_2} = \vec{a}$.

Запишем уравнение данной прямой в виде (2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

С помощью координат направляющего вектора это уравнение переписывается так:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} \quad (3)$$

Это и есть уравнение прямой по точке $M_1(x_1, y_1)$ и направляющему вектору. Его называют еще каноническим уравнением прямой на плоскости.

Замечание 1. Если в уравнении прямой по двум точкам или в каноническом уравнении прямой один из знаменателей окажется равным нулю, то это формально означает, что направляющий вектор прямой параллелен одной из координатных осей (или лежит на ней):

1) оси Ox , если $\vec{a} = (l, m) = (l, 0)$, $l \neq 0$;

2) оси Oy , если $\vec{a} = (l, m) = (0, m)$, $m \neq 0$.

Замечание 2. Обозначим через λ каждую из дробей в левой и правой частях уравнения (3) (λ - некоторый числовой параметр):

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \lambda.$$

От канонического уравнения перейдем к такому заданию прямой:

$$\begin{cases} x = x_1 + l\lambda, \\ y = y_1 + m\lambda. \end{cases}$$

Это параметрические уравнения прямой на плоскости.

Мы сохраняем за числовым параметром обозначение λ , как это было в Ю. 2. Возможны и другие обозначения: t , φ и т.п.

Замечание 3. Перепишем уравнение прямой $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$ в виде

$y - y_1 = \frac{m}{l}(x - x_1)$. Значит, если $\vec{a} = (l, m)$, $l \neq 0$, то угловой коэффициент k данной

прямой равен : $k = \frac{m}{l}$.

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(2, -3)$, с направляющим вектором $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$.

Решение. Согласно (3) уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y + 3}{\sqrt{3}}.$$

Пример 2. На плоскости найти каноническое уравнение прямой L_1 , проходящей через точку $(-1, 4)$ параллельно прямой L_2 : $\frac{x}{7} = \frac{y + 3}{1}$.

Решение. Будем искать каноническое уравнение прямой в виде (3):

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}.$$

Поскольку точка, через которую проходит прямая, известна, то от (3) перейдем к уравнению

$$\frac{x + 1}{l} = \frac{y - 4}{m}.$$

По условию прямые L_1 и L_2 параллельны. А поскольку вектор $\vec{a}_2 = (7, 1)$ - направляющий вектор прямой L_2 , то он является и направляющим вектором прямой L_1 , т.е. $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = (7, 1)$. Следовательно, уравнение искомой прямой имеет вид

$$\frac{x + 1}{7} = \frac{y - 4}{1}.$$

§2. Уравнение прямой по точке и нормальному вектору

Ненулевой вектор $\vec{n}$ называется **нормальным вектором** данной прямой на плоскости, если он перпендикулярен этой прямой (Рис. 1).

Из этого определения следует, что нормальный вектор прямой - это вектор, перпендикулярный любому ее направляющему вектору.

Пусть прямая L задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Здесь x, y - текущие координаты. Пусть точка (x_0, y_0) лежит на прямой L , тогда справедливо тождество $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Вычитая из обеих частей равенства $Ax + By + C = 0$ соответствующие части последнего тождества, получим:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (4)$$

Посмотрим на коэффициенты A и B как на координаты некоторого вектора $\vec{n} = (A, B)$. Если $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, то вектор с координатами $x - x_0, y - y_0$ является направляющим вектором прямой L .

Равенство (4) означает (см. Ю.2), что скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $(x - x_0, y - y_0)$ равно нулю. Отсюда следует, что эти векторы перпендикулярны, т.е. вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен любому направляющему вектору данной прямой.

Следовательно, $\vec{n} = (A, B)$ - нормальный вектор данной прямой. Уравнение (4) и называется **уравнением прямой по точке (x_0, y_0) и нормальному вектору $\vec{n}$** .

Мы получили также, что нормальным для прямой L , заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$, является вектор с координатами A (коэффициент при x) и B (коэффициент при y).

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(1, 4)$ с нормальным вектором $\vec{n} = (2, -5)$.

Решение. Согласно (4) уравнение искомой прямой имеет вид:

$$2(x - 1) - 5(y - 4) = 0.$$

Пример 2. Известно, что прямая L_1 проходит через точку $(2; -0,5)$. Найти уравнение прямой L_1 по точке и нормальному вектору, если L_1 параллельна прямой $L_2: 3(x + 2) + 4(y - 7) = 0$.

Решение. Будем искать уравнение прямой L_1 в виде (4):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Поскольку точка, через которую проходит эта прямая, известна, то от (4) перейдем к уравнению

$$A(x - 2) + B(y + 0,5) = 0.$$

По условию прямые L_1 и L_2 параллельны. А поскольку вектор $\vec{n}_2 = (3, 4)$ - нормальный вектор данной прямой L_2 , то он является и нормальным вектором прямой L_1 . Следовательно, уравнение искомой прямой имеет вид

$$3(x - 2) + 4(y + 0,5) = 0.$$

Замечание. Пусть прямая L задана каноническим уравнением (3):

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}.$$

Перепишем его в виде $m(x - x_1) - l(y - y_1) = 0$. Значит, если $\vec{a} = (l, m)$ - направляющий вектор прямой, то в качестве нормального вектора можно взять

вектор $\vec{n} = (m, -l)$.

§3. Взаимное расположение двух прямых

Назовем углом φ_1 между двумя прямыми L_1 и L_2 наименьший из углов между их направляющими векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ (рис. 2).

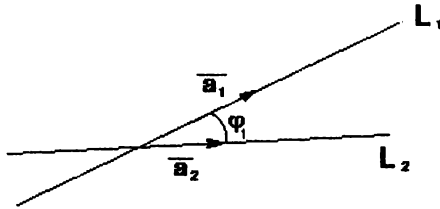


Рис. 2

Условием параллельности двух прямых L_1 и L_2 с направляющими векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ является условие коллинеарности направляющих векторов. Если $\vec{a}_1 = (l_1, m_1)$ и $\vec{a}_2 = (l_2, m_2)$, то это условие имеет вид

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad (5)$$

Условием перпендикулярности двух прямых L_1 и L_2 с направляющими векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ является условие перпендикулярности направляющих векторов. Если $\vec{a}_1 = (l_1, m_1)$ и $\vec{a}_2 = (l_2, m_2)$, то это условие имеет вид

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0 \quad (6)$$

Согласно замечанию в конце §2, если $\vec{a}_i = (l_i, m_i)$ - направляющий вектор прямой L_i , то $\vec{n}_i = (m_i, -l_i)$ ее нормальный вектор ($i=1,2$). Обозначим

$$\vec{n}_1 = (m_1, -l_1) = (A_1, B_1) \text{ и } \vec{n}_2 = (m_2, -l_2) = (A_2, B_2).$$

Тогда условие (5) параллельности прямых L_1 и L_2 превратится в условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

А условие (6) перпендикулярности прямых L_1 и L_2 - в условие

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (7)$$

Если k_1 и k_2 - угловые коэффициенты прямых L_1 и L_2 , соответственно, то справедлива формула

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

По этой формуле условие параллельности прямых:

$$k_2 - k_1 = 0,$$

т.е. $k_1 = k_2$ (тогда $\operatorname{tg} \varphi_1 = 0$). А согласно замечанию 3 §1

$$k_1 = \frac{m_1}{l_1}, k_2 = \frac{m_2}{l_2} \quad (l_1, l_2 \neq 0).$$

И мы приходим к тому же условию параллельности прямых (5).

А условие перпендикулярности:

$$1 + k_1 \cdot k_2 = 0, \text{ т.е. } k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ (тогда } \varphi_1 = 90^\circ \text{)}.$$

Отсюда $\frac{m_1}{l_1} \cdot \frac{m_2}{l_2} = -1$, или $m_1 \cdot m_2 + l_1 \cdot l_2 = 0$. И мы приходим к тому же условию перпендикулярности прямых (6).

Пример 1. Проверить, являются ли параллельными прямые

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} \text{ и } \frac{x+3}{-4} = \frac{y+2}{1}.$$

Решение. Имеем:

$$\bar{a}_1 = (l_1, m_1) = (2, -1)$$

$$\bar{a}_2 = (l_2, m_2) = (-4, 1)$$

Отсюда

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}, \text{ а } \frac{m_1}{m_2} = \frac{-1}{1} = -1,$$

и условие (5) не выполняется. Значит, данные прямые не параллельны.

Пример 2. Проверить, являются ли перпендикулярными прямые

$$2x + 7y - 1 = 0 \text{ и } \frac{x-5}{1} = \frac{y+4}{0}$$

Решение. Имеем

$$\bar{n}_1 = (A_1, B_1) = (2, 7)$$

$$\bar{n}_2 = (A_2, B_2) = (m_2, -l_2) = (0, -1)$$

Отсюда $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 2 \cdot 0 + 7 \cdot (-1) = -7 \neq 0$, и условие (7) не выполняется. Значит, данные прямые не перпендикулярны.

§4. Пересечение двух прямых

Пусть дана система двух уравнений первой степени:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Каждое из уравнений (8) в отдельности определяет прямую. Каждое их совместное решение определяет общую точку этих прямых.

Пусть определитель (см. гл. 2, §1) системы $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Из линейной

алгебры известно [12], что при этом система (8) совместна и имеет единственное решение. Геометрически это означает, что прямые, определяемые уравнениями системы, пересекаются в одной точке. Обозначим координаты этой точки через x_1 , y_1 . Их можно найти методом исключения или по формулам Крамера [12]:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Пример. Убедиться, что прямые $x + y + 1 = 0$ и $-x + 2y + 7 = 0$ пересекаются, и найти координаты x_1 , y_1 точки пересечения.

Решение. Найдем $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$. $\Delta \neq 0$. Значит, данные прямые

пересекаются. При этом по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{5}{3}, \quad y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{8}{3}.$$

§5. О линиях второго порядка

Уравнением второй степени относительно x , y называется уравнение вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

с коэффициентами A , B , C , D , E , F , численные значения которых могут быть какими угодно, но при условии, что A , B и C одновременно в нуль не обращаются. В отличие от уравнения (19) на стр. 47 Ю. 2 в коэффициентах при xy , x и y мы выделяем множитель «2».

Кривой (линией) второго порядка на плоскости Oxy называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени относительно x , y . Невырожденными кривыми второго порядка являются эллипс, гипербола и парабола.

Свойство множества быть кривой второго порядка не зависит от выбора декартовой прямоугольной системы координат, в которой рассматривается уравнение этого множества.

Кривые второго порядка подробно рассмотрены в Ю.2 Мы вернемся к ним в конце главы 3 в связи с изучением поверхностей второго порядка. А пока напомним канонические уравнения этих кривых.

1. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ с полуосями $a > 0, b > 0$.

2. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ с полуосями $a > 0, b > 0$.

Сопряженная ей гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (на рис.3 изображена пунктиром).

3. Параболы $x^2 = 2py$ с осью Oy (на рис.3 изображена пунктиром), $y^2 = 2px$ с осью Ox и параметром $p > 0$.

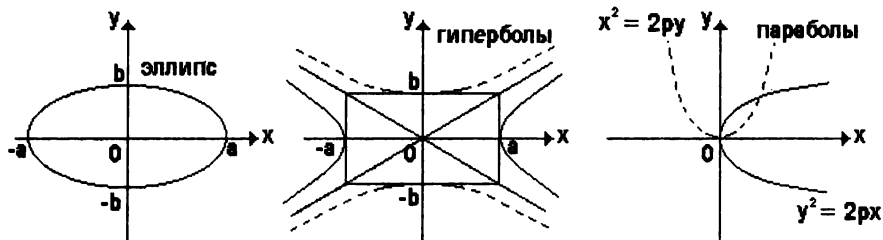


Рис. 3

ГЛАВА 2. ПОВЕРХНОСТИ И ИХ УРАВНЕНИЯ. ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим в пространстве некоторую поверхность Q. Пусть в пространстве введена декартова прямоугольная система координат Oxyz.

Тогда поверхности Q соответствует некоторое уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

левая часть которого содержит переменные x, y, z .

Поверхность, определяемая уравнением $F(x, y, z) = 0$, есть геометрическое место точек пространства Oxyz, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Это означает, что уравнению (1) удовлетворяют координаты x, y, z и каждой точки, лежащей на этой поверхности, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется **уравнением данной поверхности**. Входящие в это уравнение координаты x, y, z произвольной точки поверхности называются **текущими координатами**.

Уравнением первой степени относительно x, y, z называется уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Здесь A, B, C, D - некоторые фиксированные числа, они называются коэффициентами данного уравнения. Численные значения коэффициентов могут быть какими угодно, но при условии, что A, B, C одновременно в нуль не обращаются (последнее требование можно выразить неравенством $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

В декартовых координатах каждая плоскость определяется уравнением первой степени и наоборот, каждое уравнение первой степени определяет некоторую плоскость.

Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \quad (2)$$

называется общим уравнением плоскости.

Ненулевой вектор $\vec{n}$ называется нормальным вектором данной плоскости, если он перпендикулярен к этой плоскости (рис. 5, стр. 19).

В Ю.2 приведено уравнение плоскости по точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и нормальному вектору $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (3)$$

Здесь A, B, C те же, что в (2).

Там же указано уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Условием параллельности двух плоскостей Q_1 и Q_2 с нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ является условие коллинеарности их нормальных векторов.

Если $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, то это условие имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Условием перпендикулярности двух плоскостей Q_1 и Q_2 с нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ является условие перпендикулярности их нормальных векторов.

Если $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, то это условие имеет вид

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Сведения из Ю.2 о прямой в пространстве мы приведем ниже. Прежде чем переходить к дальнейшему изучению плоскости и прямой в пространстве, сообщаем дополнительные сведения, необходимые нам для этого.

§1. Некоторые вспомогательные понятия. Определители. Векторное и смешанное произведения

Определители

Составим таблицу чисел $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Индексы при a означают: первый - номер строки, в которой стоит число,

второй - номер столбца. Так, число a_{12} стоит в первой строке и во втором столбце.

Определение 1. Определителем второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ называется число, которое находится по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

По аналогии с определителем второго порядка составим таблицу чисел

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определение 2. Определителем третьего порядка называется число, которое находится по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Иногда вместо чисел в определитель могут входить векторы. Так, если $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - орты координатных осей Ox , Oy , Oz , то определитель

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

есть вектор

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \vec{k}$$

с координатами

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Правая тройка векторов. Векторное произведение двух векторов.

Пусть ненулевые векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ имеют общее начало и не лежат в одной плоскости (Рис. 4).

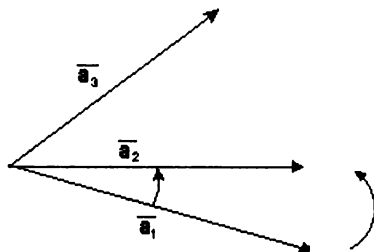


Рис. 4

Определение 1. Три вектора $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ образуют правую тройку, если наикратчайший поворот от вектора $\vec{a}_1$ к вектору $\vec{a}_2$ виден из конца вектора $\vec{a}_3$, совершающимся против часовой стрелки (Рис.4). (В этом определении важен порядок, в котором записаны векторы: $\vec{a}_1$ - первый и т.д. При этом говорят, что тройка векторов упорядочена).

Пусть даны два ненулевых и неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Определение 2. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется такой вектор (назовем его $\vec{c}$), что

- 1) $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$;
- 2) длина $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 3) если тройка координатных ортов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ - правая, то и тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - правая.

Обозначается векторное произведение так: $\vec{a} \times \vec{b}$, или так: $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Тогда

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение трех векторов

Пусть тройка векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ упорядочена.

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ называется

число, равное скалярному произведению векторов $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и $\vec{a}_3$.

Обозначается смешанное произведение так: $\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3$. Значит, можно записать:

$$\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 = ([\vec{a}_1, \vec{a}_2], \vec{a}_3).$$

Пусть векторы $\vec{a}_i$ ($i = 1, 2, 3$) заданы своими координатами: $\vec{a}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Тогда их смешанное произведение можно записать как определитель третьего порядка:

$$\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (\text{проверьте!})$$

Задача. Исходя из последней формулы, доказать, что

$$\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 = - \vec{a}_2 \vec{a}_1 \vec{a}_3.$$

§2. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Как известно, плоскость вполне определяется тремя точками, принадлежащими этой плоскости и не лежащими на одной прямой. Задача об отыскании уравнения плоскости по трем данным точкам относится к одной из основных задач аналитической геометрии, когда поверхность задана как геометрическое место точек, обладающих определенным геометрическим свойством, а требуется получить уравнение этой поверхности.

Обозначим искомую плоскость через Q . Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ - различные точки на этой плоскости, не лежащие на одной прямой.

Будем искать уравнение плоскости Q по данной точке M_1 и нормальному вектору $\vec{n} = (A, B, C)$, координаты которого нам пока не известны:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (\text{см. (3)})$$

Здесь x, y, z - текущие координаты на плоскости Q . Обозначим $M = M(x, y, z)$.

Рассмотрим два вектора $\vec{M_1 M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$, $\vec{M_2 M_3} = (x_3 - x_2, y_3 - y_2, z_3 - z_2)$ и вектор, представляющий собой векторное произведение векторов $\vec{M_1 M_3}$ и $\vec{M_2 M_3}$. По определению векторного произведения, этот последний вектор перпендикулярен к каждому из сомножителей $\vec{M_1 M_3}$ и $\vec{M_2 M_3}$. Значит, он перпендикулярен плоскости Q , и его можно взять в качестве нормального вектора $\vec{n}$ этой плоскости (Рис. 5): $\vec{n} = [\vec{M_1 M_3}, \vec{M_2 M_3}]$

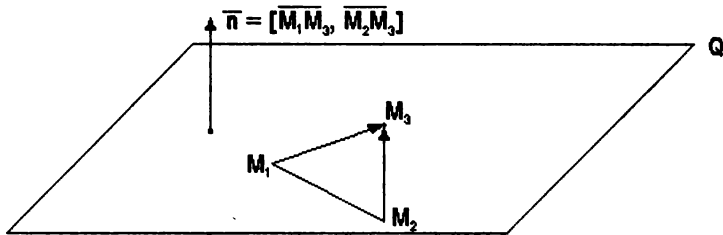


Рис. 5

Вычисляя векторное произведение, найдем:

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} \bar{k} \quad (4)$$

$$\text{Иначе } \bar{n} = (A, B, C) = \left(\begin{vmatrix} y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Подставляя эти значения для A, B, C в уравнение (3), получим **уравнение плоскости по трем точкам M_1, M_2, M_3** . С помощью определителя третьего порядка

$$\text{его можно переписать так: } \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{33}$$

Значит, точки M_1, M_2, M_3 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда равно нулю смешанное произведение $\overline{M_1M_2} \overline{M_1M_3} \overline{M_2M_3}$.

Пример. Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 0, 1), M_2(1, 1, 0), M_3(-1, 0, 0)$.

Решение. Будем искать уравнение плоскости в виде (3):

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Поскольку координаты точки M_1 известны, последнее уравнение принимает вид

$$A(x - 1) + By + C(z - 1) = 0.$$

Составим векторы $\overline{M_1M_3} = (-2, 0, -1)$, $\overline{M_2M_3} = (-2, -1, 0)$ и найдем

$\bar{n} = [\overline{M_1M_3}, \overline{M_2M_3}]$ по формуле (4):

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Значит, $\vec{n} = (A, B, C) = (-1, 2, 2)$. Подставив эти значения A, B, C в уравнение $A(x - 1) + By + C(z - 1) = 0$, получим искомое уравнение плоскости по точке и нормальному вектору: $-(x - 1) + 2y + 2(z - 1) = 0$. Чтобы получить общее уравнение, раскроем скобки в левой части последнего равенства и приведем подобные:

$$-x + 2y + 2z - 1 = 0,$$

или

$$x - 2y - 2z + 1 = 0.$$

§3. Прямая в пространстве

Напомним некоторые сведения из Ю.2.

Всякая линия в пространстве может быть задана как пересечение двух поверхностей.

Таким образом, любая прямая вполне определяется пересечением двух плоскостей, проходящих через эту прямую. Эти плоскости можно задать их общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Для приложений целесообразно знать и другие способы задания прямой в пространстве (см. Ю.2).

$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{a}$ - векторное уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a}$ и радиусом-вектором $\vec{r}_1$ фиксированной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 6). Здесь $\vec{r}$ - радиус-вектор произвольной точки $M(x, y, z)$ на прямой, λ - числовой параметр, $-\infty < \lambda < +\infty$ (по поводу обозначения λ см. замечание 2 в §1 гл. 1).

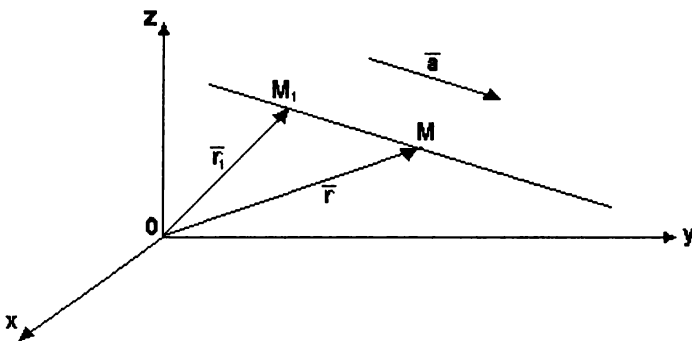


Рис. 6

Расписывая векторное уравнение прямой по координатам, получим

$$\begin{cases} x = x_1 + l\lambda \\ y = y_1 + m\lambda \\ z = z_1 + n\lambda \end{cases} \quad (6)$$

- уравнения прямой по точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и направляющему вектору $\vec{a} = (l, m, n)$; они называются еще параметрическими уравнениями прямой.

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \quad (7)$$

- уравнения прямой по точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и направляющему вектору $\vec{a} = (l, m, n)$; они называются еще каноническими уравнениями прямой (сравните с каноническим уравнением прямой на плоскости, гл. 1).

Как и в плоском случае (гл. 1), можно получить уравнения прямой, проходящей через две данные точки $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (8)$$

Замечание 1. Если в канонических уравнениях прямой или в уравнениях прямой по двум точкам обращаются в нуль некоторые знаменатели, то это формально означает, что одна или две координаты направляющего вектора равны нулю: например, при $\vec{a} = (l, m, n) = (l, 0, 0)$, $l \neq 0$, вектор $\vec{a}$ коллинеарен оси Ox (или лежит на ней); а при $\vec{a} = (l, m, n) = (l, 0, n)$, $l \neq 0$, $n \neq 0$, вектор $\vec{a}$ параллелен плоскости Oxz (или лежит на ней).

Замечание 2. В определениях (6), (7), (8) слово «уравнения» поставлено во множественном числе: в случае (6) это - три уравнения, в случаях (7) и (8) - два, не

зависящих друг от друга уравнения (например, в (7) $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$ и $\frac{x - x_1}{l} = \frac{z - z_1}{n}$).

Условием параллельности двух прямых L_1 и L_2 с направляющими векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ является коллинеарность направляющих векторов. Если $\vec{a}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\vec{a}_2 = (l_2, m_2, n_2)$, то это условие имеет вид

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (9)$$

(сравните с плоским случаем в гл. 1).

Условием перпендикулярности двух прямых L_1 и L_2 с направляющими векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ является перпендикулярность направляющих векторов. Если $\vec{a}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\vec{a}_2 = (l_2, m_2, n_2)$, то это условие имеет вид

$$l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0 \quad (10)$$

(сравните с плоским случаем в гл. 1).

Пример 1. Проверьте, параллельны ли прямые

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x+3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-7}{-2}.$$

Решение. Имеем $\vec{a}_1 = (2, -1, 1)$, $\vec{a}_2 = (-4, 2, -2)$, $\frac{l_1}{l_2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{m_1}{m_2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{n_1}{n_2} = -\frac{1}{2}$, и условие (9) выполнено. Значит, данные прямые параллельны.

Пример 2. При каком значении координаты l_1 прямые $\frac{x-1}{l_1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{1}$ и $\frac{x+3}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-7}{-2}$ перпендикулярны?

Решение. Имеем $\vec{a}_1 = (l_1, -1, 1)$, $\vec{a}_2 = (-4, 2, -2)$. Условие перпендикулярности (10) дает:

$$l_1(-4) + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-2) = 0.$$

Отсюда $l_1 = -1$. Итак, при $l_1 = -1$ данные прямые перпендикулярны.

§4. Взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве

Углом φ между прямой L и плоскостью Q называется угол между прямой L и ее проекцией на плоскость Q (см. рис.7). φ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

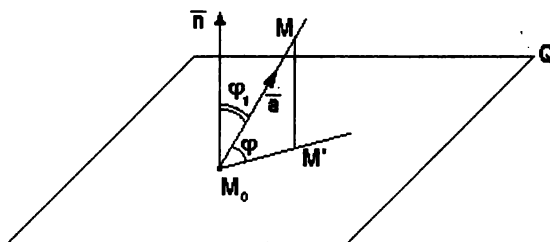


Рис. 7

Пусть M_0 - точка пересечения прямой и плоскости. На рис. 7 точка M лежит на прямой L , а MM' - перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость Q .

Пусть $\vec{n}$ - нормальный вектор плоскости Q , $\vec{a}$ - направляющий вектор прямой L . Часто вместо угла φ рассматривается угол φ_1 между векторами $\vec{n}$ и $\vec{a}$.

На рис. 7 $\varphi + \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

В Ю.2 приведена формула для $\sin \varphi$:

$$\sin \varphi = \frac{|A + Bm + Cn|}{\|\vec{n}\| \|\vec{a}\|}, \text{ если } \vec{n} = (A, B, C), \vec{a} = (l, m, n).$$

Из нее вытекают условия параллельности и условия перпендикулярности прямой и плоскости (Ю.2).

Условием параллельности прямой L с направляющим вектором $\vec{a}$ и плоскости Q с нормальным вектором $\vec{n}$ (Рис. 8) является условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$:

$$A\vec{l} + B\vec{m} + C\vec{n} = 0 \quad (11)$$

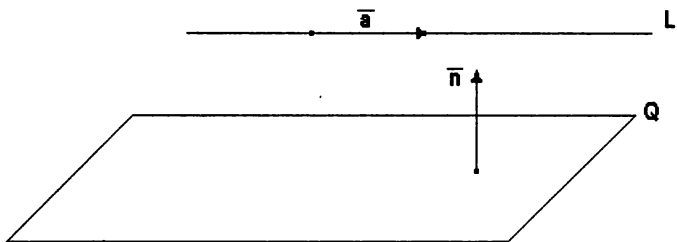


Рис. 8

Условием перпендикулярности прямой L с направляющим вектором $\vec{a}$ и плоскости Q с нормальным вектором $\vec{n}$ (Рис. 9) является условие коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$:

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C} \quad (12)$$

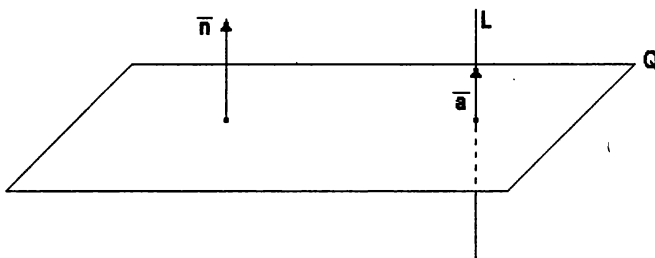


Рис. 9

Пример 1. При каком значении коэффициента C прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+3}{1}$ и плоскость $x + y + Cz = 0$ параллельны?

Решение. Имеем: $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{n} = (1, 1, C)$. Условие параллельности (11) дает:

$2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot C = 0$. Отсюда $C = -1$. Итак, при $C = -1$ данные прямая и плоскость параллельны.

Пример 2. Проверить, являются ли перпендикулярными прямая $\frac{x}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{0}$ и координатная плоскость Oxz .

Решение. Имеем $\vec{a} = (2, 0, 0)$, $\vec{n} = (0, 1, 0)$. Не прибегая к проверке условия (12), видим, что соответствующие координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$ не пропорциональны. Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$ не коллинеарны, а данная прямая и плоскость Oxz не перпендикулярны.

Пусть теперь известно, что прямая L и плоскость Q пересекаются. Покажем на примере, как находить координаты точки их пересечения.

Пример 3. Найти точку пересечения $M_1(x_1, y_1, z_1)$ прямой $\frac{x-3}{0} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{2}$ и плоскости $x - y + 2z = 0$.

Решение. Перейдем от канонических уравнений прямой к параметрическим, обозначив

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{2} = \lambda$$

(λ - числовой параметр): $x = 3$, $y = -4 + 3\lambda$, $z = 2\lambda$. Решим совместно четыре уравнения:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x = 3 \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Для этого из последних трех уравнений выражения для x , y , z через λ подставим в первое уравнение: $3 + 4 - 3\lambda + 4\lambda = 0$, или $\lambda = -7$. Полученное конкретное значение параметра λ соответствует точке пересечения прямой и плоскости. Подставляя $\lambda = -7$ в параметрические уравнения прямой, найдем $x_1 = 3$, $y_1 = -25$, $z_1 = -14$. Итак, $M_1(3, -25, -14)$ - точка пересечения прямой и плоскости.

§5. Переход от одного способа задания прямой к другому

Покажем на примерах, как переходить от одного способа задания прямой к другому.

Пример 1. В пространстве дана прямая $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+4}{2}$. Задать эту прямую как пересечение двух плоскостей.

Решение. Согласно замечанию 2 §3, в канонических уравнениях прямой - два, не зависящих друг от друга уравнения: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{-1}$ - уравнение плоскости,

параллельной оси Oz (проверьте), и $\frac{x-1}{3} = \frac{z+4}{2}$ - уравнение плоскости, параллельной оси Oy (проверьте).

Система этих уравнений и задает данную прямую:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{-1}, \\ \frac{x-1}{3} = \frac{z+4}{2}. \end{cases}$$

Пример 2. Прямая L задана как пересечение двух плоскостей Q_1 и Q_2 :

$$\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Написать канонические уравнения этой прямой.

Решение. Нам надо составить уравнения вида $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$, где

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ - некоторая фиксированная точка на данной прямой L, а $\vec{a} = (l, m, n)$ - ее направляющий вектор.

Сначала найдем на L точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Для этого в (13) приравняем одну из переменных x, y, z к некоторой постоянной. Для определенности, положим $z = z_1 = 0$. Координаты x_1, y_1 найдутся при этом из системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

Мы уже напоминали в гл. 1, что такая система совместна, если ее определитель $\Delta \neq 0$ [12].

$$\text{Вычислим } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Получим, что $\Delta \neq 0$. По формулам Крамера [12] или методом исключения

$$\text{найдем } x_1 = -\frac{2}{3}, y_1 = -\frac{7}{3}.$$

Итак, мы нашли точку $M_1\left(-\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, 0\right)$ на прямой L.

Теперь найдем направляющий вектор $\vec{a} = (l, m, n)$. Заметим, что в качестве такого вектора можно взять векторное произведение нормальных векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ плоскостей Q_1 и Q_2 , при пересечении которых получается прямая L (Рис. 10): вектор $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ перпендикулярен каждому из сомножителей $\vec{n}_1, \vec{n}_2$, как и вектор $\vec{a}$, лежащий одновременно и в плоскости Q_1 , и в плоскости Q_2 .

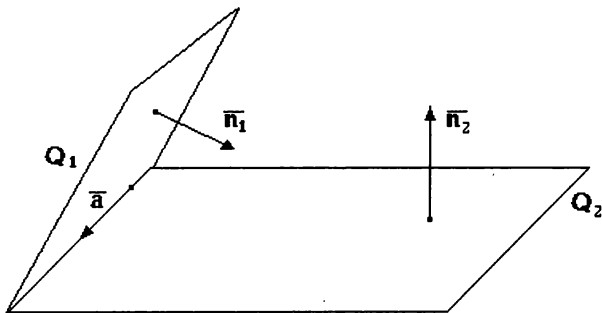


Рис. 10

$$\text{Имеем } \bar{n}_1 = (1, 1, -1), \bar{n}_2 = (2, -1, 1) \text{ и } [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0\bar{i} - 3\bar{j} - 3\bar{k}, \text{ так}$$

что, $\bar{a} = (l, m, n) = (0, -3, -3)$. Значит, канонические уравнения данной прямой имеют вид:

$$\frac{x + \frac{2}{3}}{0} = \frac{y + \frac{7}{3}}{-3} = \frac{z}{-3}.$$

ГЛАВА 3. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ИХ КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат Охуз. Определение уравнения поверхности в пространстве было дано в начале предыдущей главы.

Уравнением второй степени относительно x, y, z называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

$a_{ij} (i, j = 1, \dots, 4)$ - некоторые фиксированные числа, они называются коэффициентами данного уравнения. Численные значения коэффициентов могут быть какими угодно, но при условии, что $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ одновременно в нуль не обращаются. В обозначении коэффициентов применяется следующий принцип: в индексах коэффициентов пишется 1, 2, или 3 столько раз, сколько раз встречается сомножителем при этом коэффициенте x, y, z ; в качестве добавочного индекса берется 4 (например, коэффициент при x помечается одной единицей и одним добавочным индексом - 4); у свободного члена оба индекса добавочные (две четверки). Порядок индексов не имеет значения, т.е. $a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$.

Поверхность второго порядка есть геометрическое место точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени относительно x, y, z .

В зависимости от коэффициентов в уравнении поверхности второго порядка эти поверхности бывают вырожденными и невырожденными.

Вырожденная поверхность второго порядка может представлять собой пару пересекающихся плоскостей, пару параллельных плоскостей, плоскость, прямую, точку или пустое множество. Приведем примеры вырожденных поверхностей второго порядка.

Пример 1. Пара пересекающихся плоскостей: $x^2 - 2xy = 0$ (Рис. 11). (Здесь $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, остальные коэффициенты $a_{ij} = 0$).

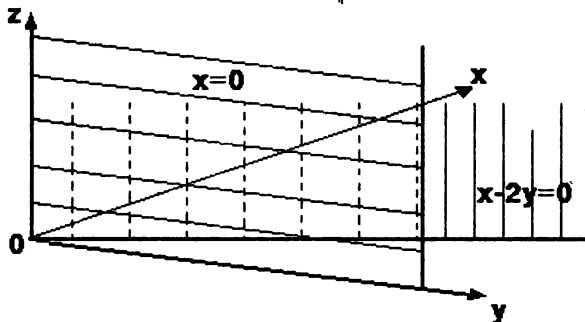


Рис. 11

Представим данное уравнение в виде $x(x - 2y) = 0$. Произведение двух сомножителей равно нулю, если равен нулю хотя бы один из них: $x = 0$ или $x - 2y = 0$. $x = 0$ - координатная плоскость Oyz. $x - 2y = 0$ - плоскость, проходящая через ось Oz. По этой оси обе плоскости пересекаются.

Пример 2. Пара параллельных плоскостей: $z^2 - z = 0$ (Рис. 12). (Здесь $a_{33} = 1$, $a_{34} = -0,5$ остальные коэффициенты $a_{ij} = 0$).

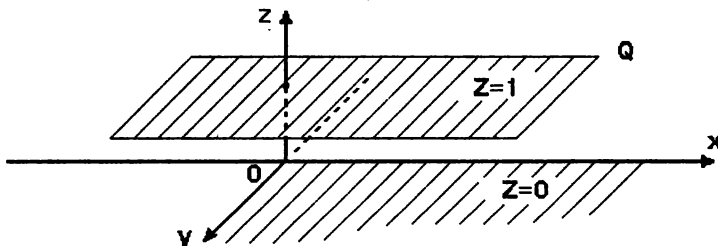


Рис. 12

Представим данное уравнение в виде $z(z - 1) = 0$. Отсюда $z = 0$ (плоскость Oxy) или $z = 1$ - плоскость, параллельная плоскости Oxy.

Пример 3. Точка $(0, 0, 0)$: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

Пример 4. Пустое множество: $y^2 + 1 = 0$. Слева в этом уравнении стоит строго положительное число, а справа - 0. Значит, ординату какой бы точки мы ни поставили в это уравнение вместо y, тождества не получится.

Мы займемся теперь подробнее **невырожденными поверхностями второго**

681/ **порядка**. К ним относятся эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды, конус и цилиндры. Подчеркнем, что свойство множества точек быть поверхностью второго порядка не зависит от выбора декартовой системы координат, в которой рассматривается уравнение этого множества.

Мы сейчас будем считать, что в пространстве введена такая прямоугольная система координат $Oxyz$, что уравнение каждой из невырожденных поверхностей имеет в ней "наиболее простой" вид (слова, взятые в кавычки, мы уточним дальше). При этом такое "простое" уравнение поверхности второго порядка называется каноническим уравнением этой поверхности.

Сначала перечислим канонические уравнения поверхностей, которые мы далее будем изучать. А затем по этим уравнениям определим форму некоторых поверхностей. Мы сделаем это, используя так называемый "метод параллельных сечений".

§ 1. Канонические уравнения поверхностей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ - эллипсоид.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ - однополостный гиперболоид.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ - двухполостный гиперболоид.}$$

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \text{ - эллиптический параболоид.}$$

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \text{ - гиперболический параболоид.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ - конус.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ - эллиптический цилиндр.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ - гиперболический цилиндр.}$$

$$x^2 = 2py \text{ - параболический цилиндр.}$$

§2. Метод параллельных сечений

Рассмотрим уравнение $F(x, y, z) = 0$, определяющее некоторую поверхность (Рис. 13).

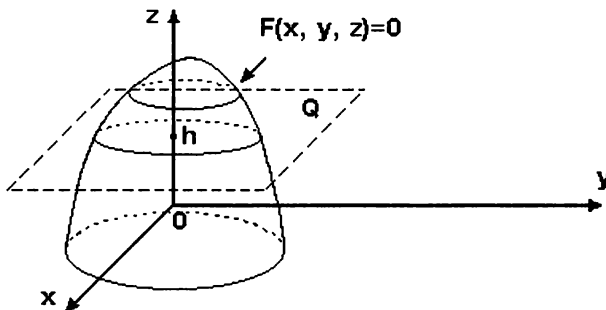


Рис. 13

Для того чтобы исследовать форму этой поверхности, рассмотрим линии ее пересечения с координатными плоскостями и с плоскостями, параллельными координатным. Пусть, например, плоскость Q , параллельная координатной плоскости Oxy , имеет уравнение $z = h$, где h - некоторая постоянная. В этой плоскости z фиксировано и текущими являются координаты x, y . Уравнение линии пересечения поверхности $F(x, y, z) = 0$ и плоскости Q получается при подстановке $z = h$ в уравнение поверхности: $F(x, y, h) = 0$.

Проводя такие построения для различных значений h , получим семейство линий, по виду которых уже достаточно хорошо можно представить вид исследуемой поверхности.

Описанный метод носит название **метода параллельных сечений**.

§3. Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность с каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \text{ Постоянные } a, b, c \text{ положительны, они называются } \textbf{полуосями}$$

эллипсоида.

Применим метод параллельных сечений, чтобы уяснить форму указанной поверхности. Рассмотрим сечения данного эллипсоида координатной плоскостью Oxy и плоскостями, параллельными Oxy . Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z = h$, а линия, которая получается в сечении, определяется двумя уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$$

Отсюда видно, что

1) при условии $|h| < c$ плоскость $z = h$ пересекает эллипсоид по эллипсу с

полуосями $a_1 = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, $b_1 = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$, расположенному симметрично относительно плоскостей Oxz , Oyz ;

2) величины a_1 и b_1 имеют наибольшие значения в плоскости Oxy , когда $h = 0$

(при этом сечение эллипсоида плоскостью Oxy имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$);

3) при возрастании $|h|$ величины a_1 и b_1 убывают;

4) при $h = \pm c$ величины a_1 и b_1 обращаются в нуль, и эллипс, образуемый сечением эллипсоида плоскостью $z = c$ (или плоскостью $z = -c$), вырождается в точку;

5) при $|h| > c$ выражения для a_1 и b_1 не имеют смысла, т.е. плоскость $z = h$ при $|h| > c$ с эллипсоидом не имеет общих точек.

Таким же способом можно исследовать форму эллипсоида, рассекая его плоскостью Oxz или плоскостью Oyz (и плоскостями, им параллельными). При

этом, в частности, сечение эллипсоида плоскостью Oxz имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, а

плоскостью Oyz $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

В сечении эллипсоида плоскостью $y = h$, $|h| < b$, получается эллипс

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}$, а плоскостью $x = h$, $|h| < a$ - эллипс $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}$.

Сопоставляя проведенные исследования, можно сказать, что эллипсоид есть замкнутая поверхность с тремя плоскостями симметрии. При данном выборе системы координат эти плоскости совмещены с координатными плоскостями Oxy , Oxz , Oyz (Рис. 14).

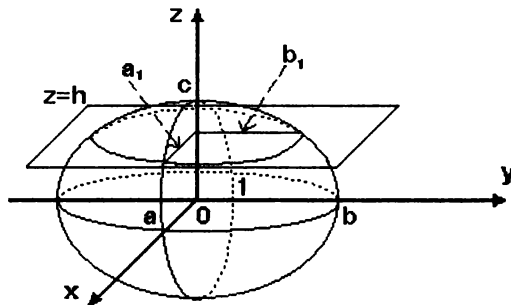


Рис. 14

При $a = b = c = R$ эллипсоид превращается в **сферу** радиуса R .

§4. Однополостный гиперболоид

Однополостным гиперболоидом называется поверхность с каноническим

уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Постоянные a, b, c положительны, они называются

полуосями однополостного гиперболоида.

Рассмотрим сечения гиперболоида координатными плоскостями Oxz, Oyz . Сечение плоскостью Oxz определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Оно представляет собой гиперболу, расположенную симметрично относительно координатных осей Ox, Oz и пересекающую ось Ox в точках $(a, 0, 0), (-a, 0, 0)$.

Сечение плоскостью Oyz определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Оно представляет собой гиперболу, расположенную симметрично относительно координатных осей Oy, Oz и пересекающую ось Oy в точках $(0, b, 0), (0, -b, 0)$.

Теперь рассмотрим сечения данного гиперболоида плоскостями $z = h$. Сечения гиперболоида такими плоскостями определяются уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Отсюда видно, что

1) любая плоскость $z = h$ пересекает гиперболоид по эллипсу с полуосями

$a_1 = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, b_1 = b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$, расположенному симметрично относительно плоскостей Oxz, Oyz ;

2) величины a_1 и b_1 имеют наименьшие значения в плоскости Oxy , когда $h = 0$, при этом $a_1 = a, b_1 = b$ и сечение гиперболоида плоскостью Oxy имеет уравнение

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; этот эллипс называется **горловым сечением** однополостного гиперболоида.

Сопоставляя проведенные исследования, можно сказать, что однополостный гиперболоид имеет вид бесконечной трубки, бесконечно расширяющийся в обе стороны от горлового эллипса. Этот гиперболоид имеет три плоскости симметрии. При данном выборе системы координат эти плоскости совмещены с координатными плоскостями Oxy, Oxz, Oyz (Рис. 15).

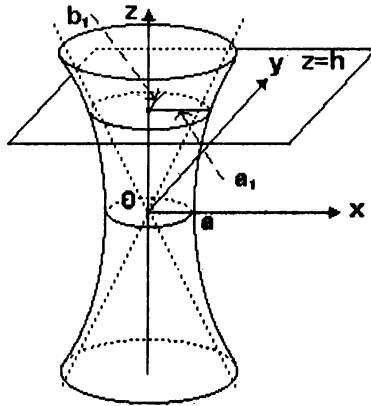


Рис. 15

При $a = b$ однополостный гиперboloид превращается в гиперboloид вращения

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$: он может быть получен вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, расположенной в плоскости Oxz , вокруг оси Oz .

§5. Гиперболический параболоид

Гиперболическим параболоидом называется поверхность с каноническим уравнением $2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$. Постоянные p и q положительны, они называются **параметрами** этого **параболоида**.

Применим метод параллельных сечений, чтобы уяснить форму указанной поверхности. Сечение гиперболического параболоида плоскостью Oxz представляет собой параболу L_0 :

$$\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0, \end{cases}$$

а сечение плоскостью Oyz - параболу K_0 :

$$\begin{cases} y^2 = -2qz, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ветви этих парабол направлены вдоль оси Oz в разные стороны.

Семейство сечений K_h :

$$\begin{cases} \frac{y^2}{q} = -2z + \frac{h^2}{p}, \\ x = h, \end{cases}$$

гиперболического параболоида плоскостями $x = h$ получается из параболы K_0

параллельным переносом так, что вершина K_n - точка $(h, 0, \frac{h^2}{2p})$ параболы L_0 .

Таким образом, гиперболический параболоид представляет собой множество точек, которое заметает парабола K_0 , перемещаясь параллельно плоскости Oyz так, что ее вершина движется по параболе L_0 (Рис. 16).

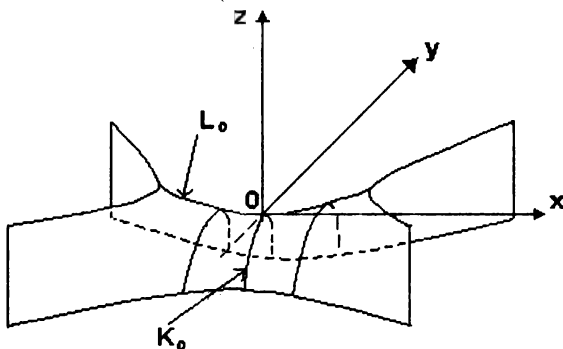


Рис. 16

§6. Поверхности вращения. Двухполостный гиперboloид. Эллиптический параболоид. Конус

Мы уже видели, что однополостный гиперboloид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ является

поверхностью вращения.

В общем случае **поверхностью вращения** называется множество точек, которое образуется при вращении некоторой плоской линии L вокруг оси l (например, вокруг одной из координатных осей Ox, Oy, Oz). При этом линия L называется **меридианом** поверхности вращения, а ось l - ее **осью вращения**. При вращении меридиана вокруг оси каждая его точка описывает окружность.

Пусть осью вращения является ось Oz , а меридиан L расположен в плоскости Oyz и задан уравнениями

$$\begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Можно показать [5], что тогда уравнением поверхности вращения является уравнение

$$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (2)$$

Например, двухполостный гиперboloид вращения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

получается при вращении гиперболы $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, расположенной в плоскости Oyz , вокруг оси Oz (рис. 17). Согласно (1) и (2) уравнение гиперboloида можно

получить, подставив в уравнение указанной гиперболы вместо y выражение вида $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$.

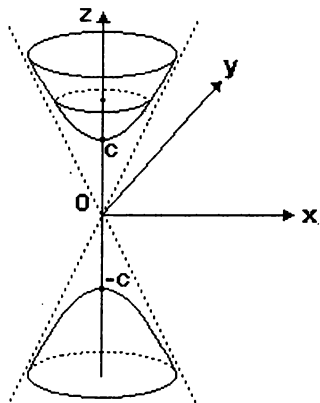


Рис. 17

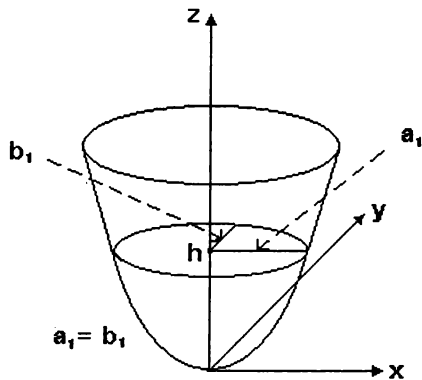


Рис. 18

Растягивая двухполостный гиперboloид вращения в направлении оси Oy в $\frac{a}{b}$ раз, получим **двухполостный гиперboloид** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$. 52

Эллиптический параболоид вращения $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p}$ ($p > 0$) получается при вращении параболы $y^2 = 2pz$, расположенной в плоскости Oyz , вокруг оси Oz (Рис. 18). Согласно (1) и (2) уравнение эллиптического параболоида вращения можно получить, подставляя в уравнение указанной параболы вместо y выражение вида $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$.

Растягивая эллиптический параболоид вращения в направлении оси Oy в $\sqrt{\frac{p}{q}}$ раз ($q > 0$), получим **эллиптический параболоид** $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$. 61

Замечание 1. Уравнение $-2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$ ($p > 0, q > 0$) также является уравнением эллиптического параболоида. Все точки этой поверхности имеют неположительную аппликату z .

Замечание 2. Поверхности $2x = \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p}$, $2y = \frac{x^2}{p} + \frac{z^2}{p}$ ($p > 0$) являются эллиптическими параболоидами вращения вокруг осей Ox , Oy , соответственно.

69 Конус вращения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ получается при вращении прямой $z = \frac{c}{a}y$, расположенной в плоскости Oyz , вокруг оси Oz (Рис. 19).

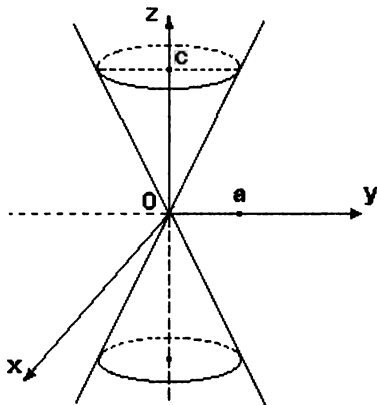


Рис. 19

Согласно (1) и (2) уравнение конуса вращения можно получить, подставив в уравнение указанной прямой вместо y выражение $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ и возводя обе части полученного выражения $z = \pm \frac{c}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$ в квадрат.

Растягивая эту поверхность в направлении оси Oy в $\frac{a}{b}$ раз, получим **конус**

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Точка, через которую проходят прямые, составляющие конус, называется **вершиной** этого конуса. При данном выборе системы координат вершина конуса совпадает с началом координат - точкой $(0, 0, 0)$.

Каноническое уравнение эллипсоида вращения (вокруг оси Oz):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Если двухполостный гиперболоид, конус или эллипсоид являются поверхностями вращения, скажем, с осью вращения Ox , то их канонические уравнения, соответственно, таковы:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = -1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Пример. Ось Oz является осью вращения конуса с вершиной в начале координат, точка M (0, -1, -1) лежит на его поверхности. Составить уравнение этого конуса.

Решение. Через вершину проходят все прямые, составляющие конус. Одна из них - прямая, проходящая через две точки O(0, 0, 0) и M(0, -1, -1) и лежащая в координатной

плоскости Oyz:
$$\begin{cases} \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{-1}, & \text{или} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y - z = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

В уравнение $y - z = 0$ подставим вместо y выражение $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$ и найдем

уравнение конуса вращения: $\pm \sqrt{x^2 + y^2} = z$, или $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

§7. Цилиндры второго порядка

Рассмотрим на плоскости Oxy линию Γ с уравнением $F(x, y) = 0$. Через каждую точку $M_1(x, y, 0)$ линии проведем прямую, параллельную оси Oz. Все эти прямые составят поверхность, которая называется цилиндрической поверхностью (или просто - **цилиндром**). При этом линия Γ называется **направляющей** этого цилиндра, а каждая из прямых цилиндра, параллельная оси Oz, называется его **образующей**.

Можно доказать, что уравнение $F(x, y) = 0$ направляющей цилиндра, если его рассматривать в пространстве, в системе координат Oxyz, есть уравнение самого цилиндра [5].

Возьмем теперь в качестве направляющей Γ кривую второго порядка в плоскости Oxy. Ее уравнение, а значит, и уравнение цилиндра с такой направляющей, можно получить из уравнения поверхности второго порядка (см. начало гл. 3), полагая в нем $a_{33} = a_{13} = a_{23} = a_{34} = 0$:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0.$$

Цилиндр, направляющей которого служит кривая второго порядка, называется **цилиндром второго порядка**.

В зависимости от вида направляющей такого цилиндра мы имеем цилиндры второго порядка следующих типов:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ - эллиптический цилиндр (Рис. 20а)}$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{ - круговой цилиндр}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{гиперболический цилиндр (Рис. 20б) } 62$$

$$2py = x^2, 2px = y^2 - \text{параболические цилиндры (Рис. 20в) } 64$$

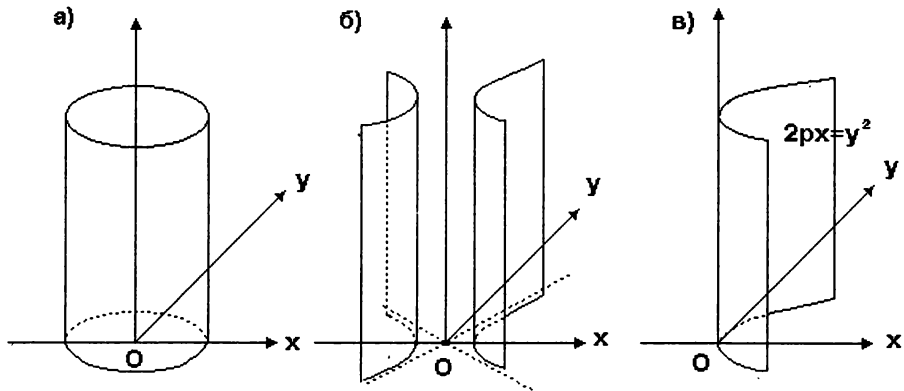


Рис. 20

Отличительной чертой канонического уравнения цилиндра с образующей, параллельной оси Oz, является отсутствие переменной z в его уравнении.

Замечание. Если в каноническом уравнении поверхности второго порядка отсутствует переменная x (или y), то такое уравнение задает цилиндр с образующей, параллельной оси Ox (или Oy).

§8. Линейчатые поверхности второго порядка

Линейчатой поверхностью называется поверхность, через каждую точку которой проходит прямая, целиком принадлежащая этой поверхности.

Среди поверхностей второго порядка линейчатыми являются, конечно, конус и цилиндры. Но оказывается, что кроме конусов и цилиндров линейчатыми поверхностями являются еще однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Любая прямая, принадлежащая линейчатой поверхности второго порядка, называется **прямолинейной образующей**.

Знаменитому изобретателю, почетному члену АН инженеру Шухову В.Г. принадлежит идея использования линейчатого характера однополостного гиперболоида в строительной технике. Шухов В.Г. предложил конструкции из металлических балок, расположенных так, как расположены прямолинейные образующие однополостного гиперболоида вращения (примером может служить телевизионная башня на Шаболовской улице в Москве).

§9. Пересечение поверхности второго порядка с прямой и с плоскостью

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Найти точки пересечения M_1 и M_2 прямой

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = -t, \\ z = 3t, \end{cases} \quad t - \text{числовой параметр,}$$

с эллипсоидом $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

Решение. Данная прямая проходит через начало координат (при $t = 0$, $x = y = z = 0$) и пересекает эллипсоид в двух точках. Чтобы найти эти точки, решим совместно уравнения поверхности и прямой:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 = 1, \\ x = 2t, \\ y = -t, \\ z = 3t. \end{cases}$$

Подставим выражения x , y , z через t из уравнений прямой в уравнение эллипсоида и найдем два значения параметра t (t_1 и t_2), соответствующие точкам пересечения: $t_1 =$

$$\frac{1}{\sqrt{41}}, t_2 = -\frac{1}{\sqrt{41}}.$$

Подставим значения t_1 и t_2 в уравнения прямой и получим координаты точек пересечения $M_1(\frac{2}{\sqrt{41}}, -\frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{3}{\sqrt{41}})$, $M_2(-\frac{2}{\sqrt{41}}, \frac{1}{\sqrt{41}}, -\frac{3}{\sqrt{41}})$.

Пример 2. Доказать, что прямая

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2\lambda, \\ z = 2\lambda, \end{cases} \quad \lambda - \text{числовой параметр,}$$

лежит на однополостном гиперболоиде $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Решение. Как и в примере 1, решим совместно уравнения прямой и поверхности:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1, \\ x = 1, \\ y = 2\lambda, \\ z = 2\lambda. \end{cases}$$

Имеем: $1 + (2\lambda)^2 - (2\lambda)^2 \equiv 1$. При подстановке выражений x , y , z через λ в уравнение поверхности, это уравнение превратилось в тождество. Значит, каким бы ни был числовой параметр λ , точка, лежащая на данной прямой, лежит и на данном гиперболоиде.

Пример 3. Доказать, что плоскость $2x + 6y - z - 4 = 0$ и эллиптический параболоид $z = x^2 + 3y^2$ имеют одну общую точку M_0 . Найти координаты точки M_0 .

Решение. Решим совместно уравнения данной плоскости и эллиптического параболоида: $\begin{cases} 2x + 6y - z - 4 = 0, \\ z = x^2 + 3y^2. \end{cases}$

Для этого выражение z через x , y из второго уравнения подставим в первое: $2x + 6y - (x^2 + 3y^2) - 4 = 0$. Выясним, при каких значениях x , y , z справедливо это равенство. Преобразуем его, выделив полные квадраты:

$$-(x^2 - 2x + 1 - 1) - 3(y^2 - 2y + 1 - 1) - 4 = 0, \text{ или } (x - 1)^2 + 3(y - 1)^2 = 0.$$

Сумма квадратов двух чисел равна нулю лишь в том случае, когда равно нулю каждое слагаемое. Поэтому исследуемое равенство выполняется только при $x = 1$, $y = 1$. Из уравнения поверхности находим: $z = 1 + 3 = 4$ (это же значение z можно получить и из уравнения плоскости: поскольку $z = 2x + 6y - 4$, то при $x = 1$, $y = 1$ $z = 2 + 6 - 4 = 4$).

Итак, $M_0(1, 1, 4)$ - единственная общая точка данной плоскости и эллиптического параболоида.

* * *

В начале этой главы мы говорили, что поверхность второго порядка имеет каноническое уравнение в некоторой специально выбранной декартовой прямоугольной системе координат $Ox_0y_0z_0$ (обозначим ее $Ox_{0\text{кан}}$). Мы теперь покажем, что если поверхность второго порядка рассматривается в произвольной системе координат $Oxyz$, то существуют формулы, по которым от координат x, y, z каждой точки M пространства в этой системе всегда можно перейти к координатам x_c, y_c, z_c точки M в системе координат $Ox_{0\text{кан}}$. При этом уравнение поверхности второго порядка относительно переменных x, y, z перейдет в каноническое уравнение этой поверхности относительно переменных x_c, y_c, z_c .

Сначала получим формулы, которые выражают координаты x_1, y_1, z_1 каждой точки пространства в некоторой системе координат $Ox_1y_1z_1$ через координаты этой точки в другой системе координат $Oxyz$.

§10. Преобразование декартовых прямоугольных координат в пространстве

1. Преобразование декартовых координат при параллельном сдвиге осей. Пусть дана декартова система координат с осями Ox, Oy, Oz . Рассмотрим новую систему координат с началом в точке O_1 , оси которой Ox_1, Oy_1, Oz_1 , соответственно, параллельны осям Ox, Oy, Oz старой системы и имеют те же направления (масштаб останется прежним), как на рис. 21.

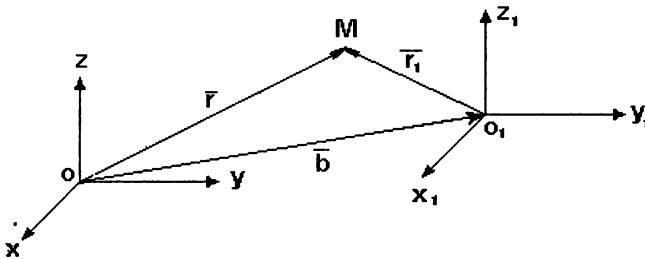


Рис. 21

Предположим, что в старой системе координат новое начало O_1 имеет координаты x_0, y_0, z_0 . Пусть M - произвольная точка пространства. Пусть эта точка имеет координаты x, y, z в старой системе координат и x_1, y_1, z_1 в новой. Рассмотрим радиусы-векторы точки M : $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (в $Oxyz$) и $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1M}$ (в $O_1x_1y_1z_1$) и радиус-вектор $\vec{b}$ точки O_1 в $Oxyz$. Имеем: $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_0, y_0, z_0)$. По определению суммы двух векторов (см. Ю.2, стр. 26), $\vec{b} + \vec{r}_1 = \vec{r}$, или (покоординатно)

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0, \\ y = y_1 + y_0, \\ z = z_1 + z_0 \end{cases} \quad (3)$$

Говорят, что по формулам (3) производится **преобразование координат при параллельном сдвиге осей**.

2. Преобразование декартовых координат при повороте вокруг оси Oz. Пусть дана декартова система координат с осями Ox , Oy , Oz . Рассмотрим новую систему координат, которая получается из старой поворотом вокруг оси Oz на угол α (начало координат O , ось Oz , масштаб остаются прежними) (рис. 22). Такое преобразование координат в пространстве эквивалентно преобразованию декартовых прямоугольных координат Oxy при повороте осей на угол α (при этом угол между осями Ox , Ox_1 и Oy , Oy_1 равен α).

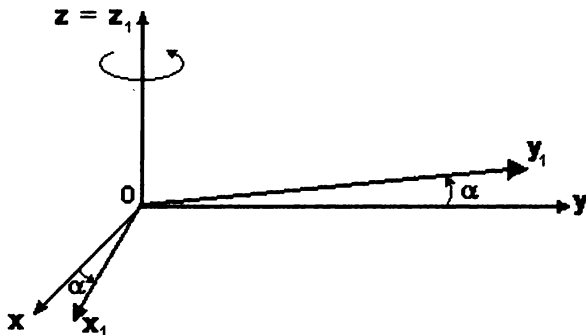


Рис. 22

Пусть M - произвольная точка пространства. Пусть эта точка имеет координаты x , y , z в старой системе координат и x_1 , y_1 , z_1 в новой. Ясно, что $z = z_1$. От координат x , y можно перейти к координатам x_1 , y_1 по формулам

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases} \quad (\text{см. ([3])})$$

Следовательно, в пространстве формулы, по которым производится преобразование координат при повороте вокруг оси Oz , таковы:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha, \\ z = z_1. \end{cases} \quad (4)$$

3. Преобразование декартовых координат при повороте осей. Пусть дана декартова система координат $Oxyz$ с осями Ox , Oy , Oz . Установим формулы преобразования декартовых координат при таком изменении координатной системы $Oxyz$, когда изменяются оси, хотя остаются перпендикулярными друг к другу (начало координат и масштаб прежние).

Пусть известны углы, которые образует каждая ось Ox_1 , Oy_1 , Oz , новой системы с осями старой; обозначения этих углов сведем в таблицу (Рис. 23).

Обозначим через $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ орты осей Ox , Oy , Oz , а через $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$ - орты осей

Ox_1 , Oy_1 , Oz_1 . Напишем разложение каждого вектора $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$ по трем векторам $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (Ю.2, стр. 29):

	Ox	Oy	Oz
Ox ₁	α_1	β_1	γ_1
Oy ₁	α_2	β_2	γ_2
Oz ₁	α_3	β_3	γ_3

Рис. 23

$$\begin{cases} \bar{i}_1 = l_1 \bar{i} + m_1 \bar{j} + n_1 \bar{k}, \\ \bar{j}_1 = l_2 \bar{i} + m_2 \bar{j} + n_2 \bar{k}, \\ \bar{k}_1 = l_3 \bar{i} + m_3 \bar{j} + n_3 \bar{k}. \end{cases} \quad (5)$$

Так как каждый из векторов $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$ является единичным (это - орты), то для каждого из них коэффициентами разложения $l_1, m_1, \dots, n_3$ будут служить направляющие косинусы (Ю.2, стр. 30). Таким образом, вся таблица коэффициентов в формулах (5) дается следующим равенством:

$$\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix},$$

которое надо понимать так: $l_1 = \cos \alpha_1$, $m_1 = \cos \beta_1$ и т.д.

Пусть М - произвольная точка пространства. Пусть эта точка имеет координаты x, y, z в старой системе координат и - x_1, y_1, z_1 в новой. Можно показать, что формулы, по которым производится **преобразование координат при повороте осей**, таковы:

$$\begin{cases} x = l_1 x_1 + l_2 y_1 + l_3 z_1, \\ y = m_1 x_1 + m_2 y_1 + m_3 z_1, \\ z = n_1 x_1 + n_2 y_1 + n_3 z_1, \end{cases} \quad (6)$$

где $l_1 = \cos \alpha_1$, $m_1 = \cos \beta_1$, ..., $n_3 = \cos \gamma_3$. (см. [4]).

Задача. Проверьте, что в случае поворота вокруг оси Oz формулы (6) переходят в формулы (4).

Теперь покажем, как пользуясь преобразованиями декартовых координат (3), (4), (6), привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду.

§11. Приведение к каноническому виду уравнения поверхности второго порядка с помощью параллельного сдвига осей

Пусть уравнение поверхности второго порядка удалось привести к одному из следующих видов:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = \pm 1, \quad (7)$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 0.$$

От декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$ перейдем к новой системе координат $O_1x_1y_1z_1$ по формулам (3) из §10:

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0, \\ y = y_1 + y_0, \\ z = z_1 + z_0. \end{cases} \quad (\text{параллельный сдвиг осей})$$

В новой системе координат данные уравнения поверхностей второго порядка примут канонический вид:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1 \quad (\text{эллипсоид})$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} = \pm 1 \quad (\text{гиперболоиды})$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} = 0 \quad (\text{конус}).$$

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка $\frac{(x + 3)^2}{9} + \frac{(y - 6)^2}{10} + \frac{z^2}{1} = 1$.

Решение. Совершив параллельный сдвиг осей по формулам

$$\begin{cases} x = x_1 - 3, \\ y = y_1 + 6, \\ z = z_1 \end{cases}$$

приведем данное уравнение к каноническому виду $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{10} + \frac{z_1^2}{1} = 1$

(эллипсоид).

Приводить к каноническому виду путем сдвига осей можно и уравнения поверхностей второго порядка, отличные от (7).

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго

порядка $2(z-1) = \frac{(x+1)^2}{1} + \frac{y^2}{4}$.

Решение. Совершив параллельный сдвиг осей по формулам

$$\begin{cases} x = x_1 - 1, \\ y = y_1, \\ z = z_1 + 1, \end{cases}$$

получим

приведем данное уравнение к каноническому виду $2z_1 = \frac{x_1^2}{1} + \frac{y_1^2}{4}$ (эллиптический параболоид).

§12. Приведение к каноническому виду уравнения поверхности второго порядка с центром в начале координат

Рассмотрим неполное уравнение второй степени следующего вида:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = H, \text{ с некоторой постоянной } H \quad (8)$$

(Таким образом, мы считаем, что равны нулю коэффициенты при x , y , z , а свободный член $a_{44} = -H$).

Левая часть уравнения (8) не меняется при замене x , y , z на $-x$, $-y$, $-z$. Следовательно, если точка $M(x, y, z)$ лежит на поверхности (8), то и точка $N(-x, -y, -z)$ тоже лежит на этой поверхности. Иначе говоря, точки поверхности (8) расположены парами, симметрично относительно начала координат. Значит, если поверхность второго порядка задана уравнением вида (8), то: 1) она обладает центром симметрии (центром), 2) начало координат помещено в центр.

Левая часть уравнения (8)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz, \quad (9)$$

называется **квадратичной формой** от трех переменных x , y , z .

Сейчас мы выясним, как повернуть систему координатных осей $Oxyz$ так, чтобы после приведения формы (9) к новым прямоугольным координатам x_1 , y_1 , z_1 исчезли все члены с произведениями $x_1 \cdot y_1$, $x_1 \cdot z_1$, $y_1 \cdot z_1$. Иными словами, надо рассмотреть формулы (6) предыдущего параграфа и подобрать коэффициенты $l_1, \dots, n_3$ так, чтобы

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2, \quad (10)$$

с некоторыми постоянными λ_1 , λ_2 , λ_3 .

Это значит, что после замены величин x , y , z по формулам (6) данная квадратичная форма должна принять вид, указанный в правой части равенства (10)

и называемый **каноническим видом** этой **формы**.

Если квадратичная форма (9) будет приведена к каноническому виду, то одновременно приведет к **каноническому виду уравнение поверхности второго порядка** (уравнение (8)).

Справедливы следующие утверждения [4]:

1) каждую квадратичную форму можно привести к каноническому виду при помощи преобразования прямоугольных координат;

2) чтобы привести данную квадратичную форму к каноническому виду, надо решить уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

с неизвестным λ . Это уравнение называется **характеристическим уравнением** для квадратичной формы (9). Корни этого уравнения $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$ называются **характеристическими числами формы** (9); именно их берут в качестве коэффициентов в правой части равенства (10), когда квадратичная форма приведена к каноническому виду;

3) каждая квадратичная форма от трех переменных имеет единственный канонический вид, не считая возможности поменять ролями абсциссу, ординату и аппликату (предполагается при этом, что рассматриваются только прямоугольные системы координат с одним и тем же масштабом);

4) коэффициенты l_i , m_i , n_i , $i = 1, 2, 3$, в формулах (6) находятся из трех систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)l_i + a_{12}m_i + a_{13}n_i = 0, \\ a_{21}l_i + (a_{22} - \lambda_i)m_i + a_{23}n_i = 0, \\ a_{31}l_i + a_{32}m_i + (a_{33} - \lambda_i)n_i = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

Нам не надо искать эти коэффициенты, если мы хотим только привести уравнение поверхности второго порядка (8) к каноническому виду. Если же нас интересует еще расположение поверхности, то приходится искать так называемые **главные направления квадратичной формы** (иначе - **главные направления поверхности** второго порядка); при этом надо знать конкретные значения для l_i , m_i , n_i , $i = 1, 2, 3$. Так, если все λ_i различны и отличны от нуля, главные направления - это направления трех векторов l_i , m_i , n_i , $i = 1, 2, 3$.

Пример 1. Доказать, что данная поверхность $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 18 = 0$ имеет центр в начале координат.

Решение. Обозначим $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 18 = F(x, y, z)$. Найдем $F(-x, -y, -z) = 7(-x)^2 + 6(-y)^2 + 5(-z)^2 - 4(-x)(-y) - 4(-y)(-z) - 18 = F(x, y, z)$.

Значит, если точка $M(x, y, z)$ лежит на данной поверхности, то и точка $N(-x, -y, -z)$ лежит на ней. N - точка симметричная точке M относительно начала координат. Следовательно, мы показали, что точка $(0, 0, 0)$ - центр данной поверхности.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка: $z = xy$. Определить вид этой поверхности.

Решение. Минувя общие рассуждения этого параграфа, заметим, что если от системы координат $Oxyz$ перейти к новой системе координат $Ox_1y_1z_1$ по формулам

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_1, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_1, \\ z = z_1, \end{cases} \quad (11)$$

то уравнение поверхности примет канонический вид: $2z_1 = x_1^2 - y_1^2$. Значит, данная поверхность - гиперболический параболоид (см. §1).

Преобразование координат (11) есть частный случай преобразования (4) при повороте вокруг оси Oz. В нашем случае $\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и, следовательно, угол

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 3. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка: $-4yz + 7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 18 = 0$. Определить вид этой поверхности.

Решение. Мы уже показали в примере 1, что данная поверхность имеет центр в начале координат.

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

Корни этого уравнения: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Значит, в некоторой новой системе координат $Ox_1y_1z_1$ каноническое уравнение данной поверхности:

$$3x_1^2 + 6y_1^2 + 9z_1^2 = 18. \text{ Перепишем его в виде } \frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{3} + \frac{z_1^2}{2} = 1. \text{ Мы видим, что}$$

данная поверхность является эллипсоидом (см. §1) с полуосями $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$.

Пример 4. Проверить, что поверхность $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = 0$ имеет центр в начале координат и привести уравнение этой поверхности к каноническому виду. Определить вид поверхности.

Решение. Обозначим $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = F(x, y, z)$. Найдем $F(-x, -y, -z) = (-x)^2 - 2(-y)^2 + (-z)^2 + 4(-x)(-y) - 8(-x)(-z) - 4(-y)(-z) + 6 = F(x, y, z)$. Значит, если точка $M(x, y, z)$ лежит на данной поверхности, то и точка $N(-x, -y, -z)$, симметричная точке M относительно начала координат, лежит на ней. Следовательно, $(0, 0, 0)$ - центр данной поверхности.

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0.$$

Корни этого уравнения: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 6$. Значит, в некоторой новой системе координат $Ox_1y_1z_1$ каноническое уравнение данной поверхности: $-3x_1^2 - 3y_1^2 + 6z_1^2 = -6$.

Перепишем его в виде $\frac{x_1^2}{2} + \frac{y_1^2}{2} - \frac{z_1^2}{1} = 1$. Мы видим, что данная поверхность

является однополостным гиперболоидом (см. §1) с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$. Поскольку $a = b$, то это - гиперболоид вращения (см. §4).

§13. О приведении к каноническому виду общего уравнения поверхности второго порядка

Кратко изложим сведения о приведении к каноническому виду общего уравнения поверхности второго порядка. Подробнее об этом можно прочитать в [4].

Пусть дано уравнение поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (12)$$

(см. начало гл.3),

Левую часть уравнения (12) образуют следующие группы членов:

1) квадратичная форма (группа старших членов)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz; \quad (13)$$

2) члены первой степени $2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z$;

3) свободный член a_{44} .

Надо путем поворота системы координат $Oxyz$ по формулам (6) и параллельного сдвига осей привести уравнение (12) к каноническому виду и тем самым установить вид данной поверхности. Точнее, мы должны добиться, чтобы

1) получила канонический вид квадратичная форма;

2) число членов первой степени стало наименьшим (точнее, уничтожить все члены первой степени, или оставить только один линейный член в случае нулевого коэффициента при квадрате соответствующей переменной);

3) пропал свободный член (в случае наличия линейного члена).

Этого можно достичь [4] если, в частности, при повороте системы координат $Oxyz$ принять за орты новых осей Ox_1 , Oy_1 , Oz_1 главные направления квадратичной формы (13), о которых мы упомянули выше.

Как и в предыдущем параграфе, составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть λ_1 , λ_2 , λ_3 - характеристические числа (корни этого уравнения).

Предположим, что мы имеем дело только с невырожденными поверхностями второго порядка. Тогда справедливы следующие утверждения [4]:

1. Если все λ_1 , λ_2 , λ_3 отличны от нуля и имеют одинаковые знаки, то уравнение (12) определяет эллипсоид.

2. Если все λ_1 , λ_2 , λ_3 отличны от нуля, но среди них есть числа разных знаков, то уравнение (12) определяет гиперболоид или конус.

3. Если хотя бы одно из чисел λ_1 , λ_2 , λ_3 равно нулю, то уравнение (12) определяет параболоид или цилиндр.

Пример 1. Рассмотрим поверхность $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 18 = 0$ из примера 3 §12.

При решении характеристического уравнения мы получили характеристические числа $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. Они отличны от нуля и положительны. Значит, еще не написав каноническое уравнение этой поверхности, можно сделать вывод, что она является эллипсоидом.

Пример 2. Рассмотрим поверхность $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = 0$ из примера 4 §12.

При решении характеристического уравнения мы получили характеристические числа $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 6$. Они отличны от нуля, но среди них есть как положительное, так и отрицательные. Значит, данное уравнение определяет либо гиперboloид, либо конус.

Пример 3. Рассмотрим поверхность $z = xy$ из примера 2 §12. Перепишем уравнение этой поверхности в виде $xy - z = 0$. Имеем: коэффициенты $a_{12} = 0,5$, $a_{34} = -0,5$, остальные коэффициенты a_i из (12) равны нулю.

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0,5 & 0 \\ 0,5 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^3 - 0,25\lambda = 0.$$

Отсюда характеристические числа: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0,5$, $\lambda_3 = -0,5$. Значит, данное уравнение определяет либо параболоид, либо цилиндр.

Рассмотрим число A , равное следующей алгебраической сумме:

$$A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Число A называется дискриминантом уравнения (12). Справедливы следующие утверждения [4]:

- 1) дискриминант A не меняется при параллельном сдвиге и повороте осей;
- 2) если $A \neq 0$, то уравнение (12) может задавать эллипсоид, гиперboloиды или параболоиды;
- 3) если $A = 0$, то уравнение (12) может задавать конус, цилиндры или вырожденные поверхности второго порядка.

Пример 4. Рассмотрим поверхность $x^2 + y^2 - 2xz + 5 = 0$. Имеем: коэффициенты $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{13} = -1$, $a_{44} = 5$, остальные коэффициенты a_i из (12) равны нулю. Поэтому дискриминант

$$A = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Значит, данное уравнение может определять либо эллипсоид, либо гиперboloид, либо параболоид.

§14. Конические сечения (коники)

Рассмотрим конус и кривые, которые получаются при пересечении этого конуса плоскостями. Если исключить случай, когда плоскость проходит через вершину

конуса, то линия пересечения будет либо а) эллипсом, либо б) параболой, либо в) гиперболой. В случаях а) и б) плоскость пересекает только одну «полость» конуса (рис. 24а, б); в случае в) она пересекает обе полости (рис. 24в).

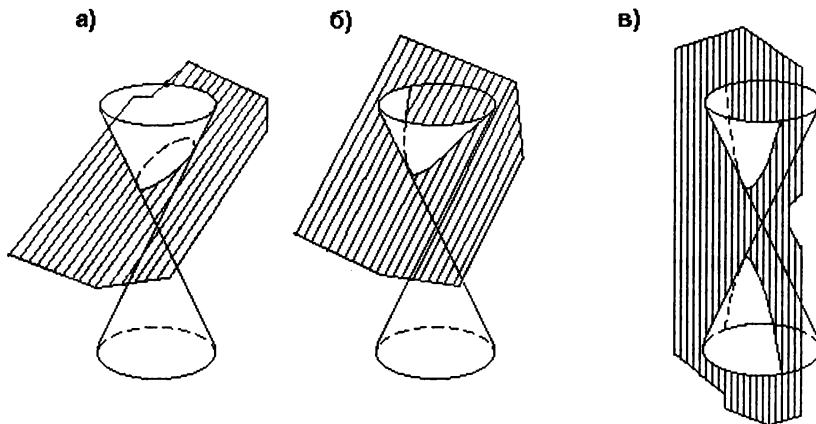


Рис. 24

Еще древние греки, не зная, конечно, уравнений кривых второго порядка, изучали эти кривые указанным способом и называли их **коническими сечениями** (или **кониками**).

ПРИМЕРЫ ОТРАБОТКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

I. ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ И ИХ УРАВНЕНИЯ. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Данной теме посвящена глава 1 тематического обзора, где изложен теоретический материал и решены задачи и примеры. Поэтому перед решением примеров следует прочесть материал главы 1.

Пример 1. Какое множество точек на плоскости Oxy определяется уравнением $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$?

Решение. Сумма квадратов двух чисел может быть равна нулю только в том случае, когда каждое из чисел равно нулю. Поэтому данному уравнению удовлетворяют координаты одной точки на плоскости Oxy : $x = 1$, $y = -2$.

Пример 2. Найти каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $(1, -3)$ параллельно прямой $2x + 7y - 1 = 0$.

Решение. Будем искать уравнение прямой в виде $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1}$. Поскольку точка, через которую проходит прямая, дана, подставим ее координаты в это уравнение:

$$\frac{x - 1}{l_1} = \frac{y + 3}{m_1}.$$

По определению, ненулевой вектор, параллельный прямой, является ее направляющим вектором. Найдем направляющий вектор данной прямой: $(l_2, m_2) = (-B, A) = (-7, 2)$. Его же можно принять за направляющий вектор искомой прямой. Следовательно, уравнение искомой прямой:

$$\frac{x - 1}{-7} = \frac{y + 3}{2}.$$

Пример 3. Найти уравнение прямой по точке (x_0, y_0) и нормальному вектору, если $(x_0, y_0) = (-\sqrt{2}, 17)$ и прямая параллельна прямой $y = 5x + 4$.

Решение. Будем искать уравнение прямой в виде $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Поскольку точка, через которую проходит данная прямая, дана, перепишем это уравнение в виде:

$$A(x + \sqrt{2}) + B(y - 17) = 0.$$

Нормальный вектор данной прямой является и нормальным вектором искомой прямой. Найдем его координаты, предварительно переписав уравнение $y = 5x + 4$ в виде $-5x + y - 4 = 0$. $(A, B) = (-5, 1)$, и уравнение искомой прямой:

$$-5(x + \sqrt{2}) + (y - 17) = 0.$$

Пример 4. Определить, параллельны ли прямые $\frac{x - 3}{5} = \frac{y + 4}{1}$ и $x + y + 4 = 0$.

Решение. Пусть $\vec{a}_1 = (l_1, m_1)$, $\vec{a}_2 = (l_2, m_2)$ - направляющие векторы данных

прямых. Условие параллельности прямых: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}$. Имеем: $\vec{a}_1 = (5, 1)$,

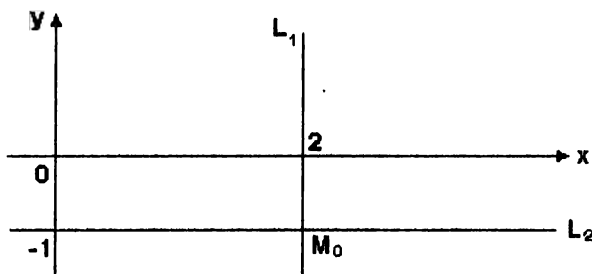
$\vec{a}_2 = (-1, 1)$. Найдем $\frac{l_1}{l_2} = \frac{5}{-1} = -5$ и $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{1} = 1$. Значит, $\frac{l_1}{l_2} \neq \frac{m_1}{m_2}$, и данные прямые не параллельны.

Пример 5. Определить, перпендикулярны ли прямые $y = 7x + 1$ и $\frac{x+4}{-7} = \frac{y}{1}$.

Решение. Пусть $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ - нормальные векторы данных прямых. Условие перпендикулярности прямых: $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$. Перепишав уравнение первой прямой в виде $-7x + y - 1 = 0$, получим $\vec{n}_1 = (-7, 1)$. Перепишав уравнение второй прямой в виде $(x + 4) + 7y = 0$, получим $\vec{n}_2 = (1, 7)$. Найдем $A_1 A_2 + B_1 B_2 = -7 \cdot 1 + 1 \cdot 7 = 0$. Следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример 6. Найти уравнение прямой L_1 , проходящей через точку $M_0(x_0, y_0) = (2, -1)$ перпендикулярно к прямой $L_2: y = -1$. Сделать чертеж.

Решение. Заметим, что данная прямая $y = -1$ параллельна оси Ox , а данная точка $(2, -1)$ лежит на L_2 . Значит, искомая прямая параллельна оси Oy и имеет уравнение $x = 2$:



II. Поверхности и их уравнения. Плоскость и прямая в пространстве

Данной теме посвящена глава 2 тематического обзора, где изложен теоретический материал и решены задачи и примеры. Поэтому перед решением примеров следует прочесть материал главы 2.

Пример 7. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1, 1, 2)$, если известно, что плоскость проходит через ось Oz .

Решение. Будем искать уравнение плоскости по трем точкам M_1, M_2, M_3 , не лежащим на одной прямой. Поскольку плоскость проходит через ось Oz , в качестве M_2 и M_3 можно взять точки $M_2(0, 0, 0)$, $M_3(0, 0, 1)$, лежащие на Oz . Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} y_1 - y_1 & z_1 - z_1 \\ y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \end{vmatrix} (x - x_1) - \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix} (y - y_1) + \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} (z - z_1) = 0.$$

Вычислим коэффициенты этого уравнения:

$$\begin{vmatrix} y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$-\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \\ x_3 - x_2 & z_3 - z_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Следовательно, уравнение плоскости: $-1(x - 1) + 1(y - 1) + 0(z - 2) = 0$, или $x - y = 0$.

Пример 8. Найти общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1, -1, 2)$ параллельно плоскости $x - 4y + z - 8 = 0$.

Решение. Будем искать уравнение плоскости по точке и нормальному вектору:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Поскольку координаты точки M_1 известны, перепишем это уравнение в виде:

$$A(x - 1) + B(y + 1) + C(z - 2) = 0.$$

Условием параллельности двух плоскостей является коллинеарность их нормальных векторов. Поэтому в качестве нормального вектора (A, B, C) искомой плоскости можно взять нормальный вектор $(1, -4, 1)$ данной плоскости. Итак, $x - 1 - 4(y + 1) + (z - 2) = 0$ - уравнение искомой плоскости. Отсюда ее общее уравнение: $x - 4y + z - 7 = 0$.

Пример 9. В пространстве дана прямая $\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{-1}$. Задать эту прямую как пересечение двух плоскостей, одна из которых параллельна оси Oz , а другая - оси Oy .

Решение. Мы знаем, что в канонических уравнениях прямой есть два, не зависящих друг от друга, уравнения. Каждое из них задает плоскость, в которой

лежит данная прямая. В качестве первой плоскости возьмем плоскость $\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{3}$,

или $3x - y + 13 = 0$. Эта плоскость параллельна оси Oz , поскольку ее нормальный вектор $(3, -1, 0)$ перпендикулярен направляющему вектору $\vec{k} = (0, 0, 1)$ оси Oz

$(3 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0)$. В качестве второй плоскости возьмем $\frac{x+3}{1} = \frac{z}{-1}$, или

$x + z + 3 = 0$. Эта плоскость параллельна оси Oy (проверьте!). Итак, данную прямую можно задать как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} 3x - y + 13 = 0, \\ x + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Пример 10. Найти точку пересечения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ y + z = 0 \end{cases} \text{ и плоскости } 6x + 2y - 7z + 1 = 0.$$

Решение. Эту задачу можно решать двумя способами.

Способ 1. Перейти к параметрическим уравнениям данной прямой и решить задачу так, как указано в примере 9 «Тренинга умений».

Способ 2. Решим совместно уравнения плоскости и прямой:

$$\begin{cases} 6x + 2y - 7z + 1 = 0, \\ x - y = 0, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Для этого выразим x и z через y из второго и третьего уравнений, соответственно: $x = y$, $z = -y$. Подставим их значения в первое уравнение:

$15y + 1 = 0$. Из этого уравнения найдем $y_0 = -\frac{1}{15}$. Поскольку $x = y$, то $x_0 = -\frac{1}{15}$,

а $z = -y$, так что $z_0 = \frac{1}{15}$. Итак, $M_0(-\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{15})$.

Пример 11. Подобрать значения коэффициентов A и B в общем уравнении плоскости $Ax + By + 5z + 1 = 0$ так, чтобы эта плоскость была перпендикулярна прямой

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ 2x + y + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Обозначим:

$\vec{n}_1$ - нормальный вектор плоскости $x - y + z = 0$,

$\vec{n}_2$ - нормальный вектор плоскости $2x + y + 3 = 0$,

$\vec{n}$ - нормальный вектор данной плоскости,

$\vec{a}$ - направляющий вектор данной прямой.

Имеем: $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{n}_2 = (2, 1, 0)$, $\vec{n} = (A, B, 5)$. Найдем $\vec{a}$ в виде векторного

произведения $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$: $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Итак, $\vec{a} = (-1, 2, 3)$.

Условием перпендикулярности прямой и плоскости является условие коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$: $\frac{-1}{A} = \frac{2}{B} = \frac{3}{5}$. Отсюда $A = -\frac{5}{3}$, $B = \frac{10}{3}$, и плоскость

$-\frac{5}{3}x + \frac{10}{3}y + 5z + 1 = 0$ перпендикулярна данной прямой.

III. Поверхности второго порядка. Их канонические уравнения

Данной теме посвящена глава 3 тематического обзора, где изложен теоретический материал и решены задачи и примеры. Поэтому перед решением примеров следует прочесть материал главы 3.

Пример 12. Совершить последовательно поворот вокруг оси Oz и параллельный сдвиг осей так, чтобы привести к каноническому виду уравнение поверхности $x^2 + y^2 - xy + z^2 - 2z = 3$. Определить вид этой поверхности.

Решение. Сначала в плоскости Oxy перейдем к системе координат Ox_1y_1 по формулам

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha \end{cases}$$

так, чтобы сумма $x^2 + y^2 - xy$ в новых координатах не содержала произведение x_1y_1 . Для этого запишем эту сумму в новых координатах:

$x^2 + y^2 - xy = (x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha)^2 + (x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha)^2 - (x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha)(x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha)$.
После возведения в квадрат, перемножения и приведения подобных получим:

$$x^2 + y^2 - xy = x_1^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - \cos \alpha \cdot \sin \alpha) + y_1^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) + x_1 y_1(-\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x_1^2(1 - \cos \alpha \cdot \sin \alpha) + y_1^2(1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha) + x_1 y_1(-\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha).$$

Слагаемое с x_1y_1 пропадет, если взять $\alpha = \frac{\pi}{4}$, т.е. совершить поворот осей

Oxy против часовой стрелки на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Этому повороту в плоскости Oxy соответствует преобразование координат x, y, z в пространстве (поворот вокруг оси Oz):

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_1, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_1, \\ z = z_1. \end{cases}$$

$$\text{Найдем } 1 - \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2},$$

$$1 + \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

В новой системе координат $Ox_1y_1z_1$ данное уравнение поверхности имеет вид:

$$\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} y_1^2 + z_1^2 - 2 z_1 = 3.$$

Запишем это уравнение так: $\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{3}{2} y_1^2 + z_1^2 - 2 z_1 + 1 = 4$, или

$$\frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{\frac{8}{3}} + \frac{(z_1-1)^2}{4} = 1$$

Уравнение поверхности приняло вид $\frac{(x_1 - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y_1 - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z_1 - z_0)^2}{c^2} = 1$, где $x_0 = y_0 = 0, z_0 = 1$.

Перейдем к новой системе координат $O_1x_2y_2z_2$ по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2, \\ z_1 = z_2 + 1. \end{cases} \quad (\text{параллельный сдвиг осей})$$

Получаем, что в системе координат $O_1x_2y_2z_2$ поверхность задается каноническим уравнением $\frac{x_2^2}{8} + \frac{y_2^2}{\frac{8}{3}} + \frac{z_2^2}{4} = 1$. Данная поверхность - эллипсоид с

полуосями $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $c = 2$.

Пример 13. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка, найдя характеристические числа квадратичной формы, входящей в уравнение $x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 3 = 0$ этой поверхности. Определить вид этой поверхности.

Решение. В уравнении поверхности слагаемые с x, y, z в первой степени отсутствуют. Значит, эта поверхность обладает центром. Выпишем квадратичную форму: $x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2yz$; здесь $a_{11} = a_{22} = 1, a_{33} = 0, a_i = a_j = 1$ при $i \neq j, i, j = 1, 2, 3$. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 2) = 0.$$

Найдем характеристические числа (корни характеристического уравнения): $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}, \lambda_3 = 1 + \sqrt{3}$. Следовательно, в некоторой новой системе координат $Ox_1y_1z_1$ каноническое уравнение данной поверхности:

$$(1 - \sqrt{3})y_1^2 + (1 + \sqrt{3})z_1^2 = 3, \text{ или } \frac{y_1^2}{\frac{3}{1-\sqrt{3}}} + \frac{z_1^2}{\frac{3}{1+\sqrt{3}}} = 1. \text{ Это - эллиптический цилиндр.}$$

Поскольку x_1 не входит в уравнение поверхности (ни в первой, ни во второй степени), образующие этого цилиндра параллельны новой оси Ox_1 .

Пример 14. Исследовать методом параллельных сечений форму

эллиптического параболоида $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$ ($p > 0, q > 0$).

Решение. Рассмотрим сечения параболоида координатными плоскостями Oxz и Oyz .

При $y = 0$ (плоскость Oxz) из уравнения параболоида имеем: $x^2 = 2pz$, т.е. сечение плоскостью Oxz определяется уравнениями $\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0. \end{cases}$

Оно представляет собой параболу, симметричную относительно оси Oz с вершиной в начале координат; параметр этой параболы равен p .

Сечение плоскостью Oyz определяется уравнениями $\begin{cases} y^2 = 2qz, \\ x = 0 \end{cases}$

и представляет собой параболу с параметром q и вершиной в начале координат, симметричную относительно оси Oz .

Теперь рассмотрим сечения параболоида плоскостями $z = h$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h, \\ z = h. \end{cases}$$

Отсюда видно, что 1) при $h > 0$ плоскость $z = h$ пересекает эллиптический параболоид по эллипсу с полуосями $a_1 = \sqrt{2hp}$, $b_1 = \sqrt{2hq}$, расположенному симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz ; 2) при возрастании h величины a_1 и b_1 возрастают; 3) если $h = 0$, то $a_1 = b_1 = 0$, и эллипс в сечении плоскостью Oxy вырождается в точку $(0, 0)$; 4) при $h < 0$ нет точек параболоида, лежащих в плоскости $z = h$.

Сопоставляя изложенное, заключаем, что эллиптический параболоид имеет вид бесконечной выпуклой чаши. Он обладает двумя плоскостями симметрии (в данном случае это - плоскости Oxz и Oyz).

На рис. 18 тематического обзора $a_1 = b_1$, т.к. на этом рисунке изображен эллипсоид вращения (вокруг оси Oz).

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритмы
1	2	3
1	Нахождение углового коэффициента k прямой, заданной общим уравнением	1. Убедиться в том, что в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ коэффициент $B \neq 0$. 2. Из данного уравнения выразить By: $By = -Ax - C$. 3. Обе части полученного уравнения разделить на $B \neq 0$: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. 4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k имеет вид $y = kx + b$. Значит, $k = -\frac{A}{B}$.
2	Нахождение нормально-го вектора $\vec{n}$ прямой, заданной уравнением с угловым коэффициентом	1. В данном уравнении $y = kx + b$ перенести влево слагаемые из правой части: $-kx + y - b = 0$. 2. Общее уравнение прямой имеет вид $Ax + By + C = 0$, и в нашем случае $A = -k, B = 1, C = -b$. 3. Поскольку нормальный вектор $\vec{n} = (A, B)$, получаем $\vec{n} = (A, B) = (-k, 1)$.
3	Нахождение нормально-го вектора $\vec{n}$ прямой, заданной каноническим уравнением	1. Обе части данного уравнения $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$ умножить на lm: $m(x - x_1) = l(y - y_1)$. 2. Перенести правую часть последнего уравнения влево: $m(x - x_1) - l(y - y_1) = 0$. 3. Уравнение прямой по точке (x_1, y_1) и нормальному вектору (A, B) имеет вид: $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$, и в нашем случае $A = m, B = -l$. 4. $\vec{n} = (A, B) = (m, -l)$.
4	Проверка того, что прямые, заданные уравнениями $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2$, пересекаются. Нахождение координат x_1, y_1 точки их пересечения	1. Составить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ и вычислить его. 2. Если $\Delta \neq 0$, то прямые пересекаются. 3. Найти x_1, y_1, решая совместно уравнения данных прямых методом исключения или по формулам Крамера.

1	2	3
5	Проверка того, что точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит на данной плоскости Q	- В данное уравнение плоскости подставить вместо x, y, z координаты точки x_1, y_1, z_1, соответственно. - Если при этом получится тождество, то M_1 лежит на Q.
6	Нахождение нормального вектора $\vec{n}$ плоскости, в которой лежат данные неколлинеарные векторы $\vec{b}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}_2 = (x_2, y_2, z_2)$	- Убедиться, что $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ неколлинеарные векторы (их соответствующие координаты не должны быть пропорциональны). - Найти векторное произведение $[\vec{b}_1, \vec{b}_2]$ и записать его в виде $x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}$. - Взять $\vec{n} = (x_3, y_3, z_3)$.
7	Нахождение координат x_0, y_0, z_0 какой-нибудь точки плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ при $C \neq 0, B \neq 0, D \neq 0$	- В качестве x_0, y_0 взять два произвольных числа и в уравнении плоскости положить $x = x_0, y = y_0$: $Ax_0 + By_0 + Cz + D = 0$. - Из полученного равенства найти $z = z_0 = -\frac{1}{C} (Ax_0 + By_0 + D)$.
8	Нахождение направляющего вектора $\vec{a}$ прямой, заданной как пересечение двух плоскостей $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$	- Выписать координаты нормальных векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ данных плоскостей: $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. - Найти векторное произведение $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ и записать его в виде $x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$. - Взять $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$.
9	Нахождение точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пересечения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ с прямой $\begin{cases} x = x_1 + \lambda, \\ y = y_1 + m\lambda, \\ z = z_1 + n\lambda \end{cases}$	- Решить совместно уравнения плоскости и прямой: $A(x_1 + \lambda) + B(y_1 + m\lambda) + C(z_1 + n\lambda) + D = 0$, и найти значение $\lambda = \lambda_0$, соответствующее точке пересечения M_0. - Найти $x_0 = x_1 + \lambda_0, y_0 = y_1 + m\lambda_0, z_0 = z_1 + n\lambda_0$ из уравнений прямой.
10	Нахождение по каноническому уравнению цилиндра второго порядка 1) уравнения его направляющей, 2) какой из координатных осей параллельны образующие этого цилиндра	- Уравнение направляющей (в одной из координатных плоскостей) совпадает с уравнением цилиндра. - Образующие параллельны той координатной оси, "название" которой в уравнении цилиндра отсутствует (например, если отсутствует z, то - оси Oz).

1	2	3
11	Составление характеристического уравнения данной квадратичной формы переменных x, y, z	1. $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$ где $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{32} = a_{23}$ - коэффициенты квадратичной формы при $x^2, y^2, z^2, 2xy, 2xz, 2yz$, соответственно.
12	По наличию в каноническом уравнении невырожденной поверхности второго порядка слагаемых, содержащих x^2, y^2, z^2, x, y, z , определить возможный вид поверхности	1. Если в уравнение входят x^2, y^2, z^2 и знаки перед ними одинаковые, то поверхность является эллипсоидом. 2. Если в уравнение входят x^2, y^2, z^2 и знаки перед ними различны, то поверхность - гиперболоид или конус. 3. Если две переменные входят во второй степени, а третья - в первой, то поверхность - параболоид. 4. Если одна из переменных x, y, z, (в 1-ой и 2-ой степенях) отсутствует, то поверхность - цилиндрическая (цилиндр).

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №1

Задание

Найти (если это возможно) угловой коэффициент k прямой $2x - 8y + 3 = 0$.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	2	3
1	Убедиться в том, что в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ коэффициент $B \neq 0$	$B = -8 \neq 0$
2	Из данного уравнения выразить By : $By = -Ax - C$	$-8y = -2x - 3$
3	Обе части полученного уравнения разделить на $B \neq 0$: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$	$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$
4	Уравнение прямой с угловым коэффициентом k имеет вид $y = kx + b$.	$k = \frac{1}{4}$

Решить самостоятельно следующие задачи

1.1. Найти (если это возможно) угловой коэффициент k прямой $6x + 7y - 1 = 0$.

Решение

1.2. Найти (если это возможно) угловой коэффициент k прямой $x + 16y + 8 = 0$.

Решение

1.3. Найти (если это возможно) угловой коэффициент k прямой $x - 0,5y + 0,25 = 0$.

Решение

1.4. Найти (если это возможно) угловой коэффициент k прямой $x + 0,12y - 100 = 0$.

Решение

1.5. Найти (если это возможно) угловой коэффициент k прямой $9x - 18y + 4 = 0$.

Решение

2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №2

Задание

Найти нормальный вектор прямой $y = 10x - \sqrt{3}$.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	2	3
1	В данном уравнении перенести влево слагаемые из правой части	$-10x + y + \sqrt{3} = 0$
2	Общее уравнение прямой имеет вид $Ax + By + C = 0$	В нашем случае $A = -10$, $B = 1$, $C = \sqrt{3}$
3	Нормальный вектор $\vec{n} = (A, B)$	$\vec{n} = (A, B) = (-10, 1)$

Решить самостоятельно следующие задачи

2.1 Найти нормальный вектор прямой $y = 9x + 0,5$

Решение

2.2 Найти нормальный вектор прямой $y = 0,4x - 1$

Решение

2.3 Найти нормальный вектор прямой $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2} + 1$

Решение

2.4 Найти нормальный вектор прямой $y = -16x + 12$

2.5 Найти нормальный вектор прямой $y = -7x + 9$

Решение

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №3

Задание

Найти нормальный вектор прямой $\frac{x+4}{9} = \frac{y+3}{-1}$.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	2	3
1	Обе части данного уравнения $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$ умножить на lm	$-(x + 4) = 9(y + 3)$
2	Перенести правую часть последнего уравнения влево	$-(x + 4) - 9(y + 3) = 0$
3	Уравнение прямой по точке (x_1, y_1) и нормальному вектору (A, B) имеет вид: $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$	В нашем случае $A = -1, B = -9$
4	$\vec{n} = (A, B)$	$\vec{n} = (-1, -9)$

Решить самостоятельно следующие задачи

3.1. Найти нормальный вектор прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y-6}{5}$

Решение

3.2. Найти нормальный вектор прямой $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-2}$

Решение

3.3. Найти нормальный вектор прямой $\frac{x-6}{-1} = \frac{y+2}{-4}$

Решение

3.4. Найти нормальный вектор прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{0}$

Решение

3.5. Найти нормальный вектор прямой $\frac{x-3}{0} = \frac{y+4}{1}$

Решение

4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №4

Задание

Убедиться, что прямые $x + y + 2 = 0$ и $x + 4y - 1 = 0$ пересекаются. Найти координаты x_1, y_1 точки их пересечения.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	2	3
1	Составить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ и вычислить его	$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$
2	Если $\Delta \neq 0$, то прямые пересекаются	$\Delta = 3 \neq 0$. Значит, прямые пересекаются
3	Найти x_1, y_1 , решая совместно уравнения данных прямых	Метод исключения дает: $\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$ $-3y + 3 = 0, y = 1$ $x = -y - 2, x = -1 - 2 = -3,$ $(x_1, y_1) = (-3, 1)$

Решить самостоятельно следующие задачи

4.1. Убедиться, что прямые $x - y - 1 = 0$ и $2x + y + 7 = 0$ пересекаются. Найти координаты x_1, y_1 точки их пересечения.

4.2. Убедиться, что прямые $2x - 3y = 0$ и $x + 16y - 1 = 0$ пересекаются. Найти координаты x_1, y_1 точки их пересечения.

4.3. Убедиться, что прямые $3x + 16y = 0$ и $2x - y + 5 = 0$ пересекаются. Найти координаты x_1, y_1 точки их пересечения.

4.4. Убедиться, что прямые $x + 12y - 7 = 0$ и $9x + 6y - 4 = 0$ пересекаются. Найти координаты x_1, y_1 точки их пересечения.

4.5. Убедиться, что прямые $8x - 5y + 10 = 0$ и $x + y + 2 = 0$ пересекаются. Найти координаты x_1, y_1 точки их пересечения.

5. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №5

Задание

Проверить, что точка $M_1(2, 0, -4)$ лежит на плоскости $Q: 2x + y + z = 0$.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	2	3
1	В данное уравнение плоскости подставить вместо x, y, z координаты точки x_1, y_1, z_1 , соответственно	$2 \cdot 2 + 0 + (-4) = 0$, или $0 \equiv 0$
2	Если при этом получится тождество, то M_1 лежит на Q	Точка $M_1(2, 0, -4)$ лежит на данной плоскости

Решить самостоятельно следующие задачи

5.1. Проверить, что точка $M_1(0, 0, 1)$ лежит на плоскости $Q: 3x + 5y = 0$.

5.2. Проверить, что точка $M_1(2, 1, 0)$ лежит на плоскости $Q: x - y + 3z - 1 = 0$.

$$2 - 1 + 3 \cdot 0 - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

5.3. Проверить, что точка $M_1(0, 4, 3)$ лежит на плоскости Q :

$$5x + 2y + 2z - 14 = 0.$$

$$0 + 8 + 6 - 14 = 0$$

5.4. Проверить, что точка $M_1(-4; 0,25; 10)$ ~~лежит~~ на плоскости Q :

$$2x + 4y + 7z = 0.$$

$$-8 + 1 + 70 \neq 0$$

5.5. Проверить, что точка $M_1(10, -10, -1)$ лежит на плоскости $Q: x + y - z - 1 = 0$.

6. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №6

Задание

Найти нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости, в которой лежат векторы $\vec{b}_1 = (1, -2, -6)$, $\vec{b}_2 = (-4, 8, 1)$.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	2	3
1	Убедиться, что векторы $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ не коллинеарны	$\frac{1}{-4} = \frac{-2}{8} \neq \frac{-6}{1}$ Условие коллинеарности двух векторов не выполняется. Значит, $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ не коллинеарны
2	Найти векторное произведение $[\vec{b}_1, \vec{b}_2]$: $[\vec{b}_1, \vec{b}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$	$[\vec{b}_1, \vec{b}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -6 \\ -4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$
3	Вычислить определитель из п. 2, записав его в виде $x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$	$[\vec{b}_1, \vec{b}_2] =$ $= \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} =$ $= 46\vec{i} + 23\vec{j} + 0\vec{k}, \text{ т.е.}$ $x_3 = 46, y_3 = 23, z_3 = 0$
4	Взять $\vec{n} = (x_3, y_3, z_3)$	$\vec{n} = (46, 23, 0)$

Решить самостоятельно следующие задачи

6.1. Найти нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости, в которой лежат векторы $\vec{b}_1 = (2, -1, 5)$, $\vec{b}_2 = (3, 0, 1)$.

6.2. Найти нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости, в которой лежат векторы $\vec{b}_1 = (1, 1, -1)$, $\vec{b}_2 = (0, 6, 1)$.

6.3. Найти нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости, в которой лежат векторы $\vec{b}_1 = (1, 5, 0)$, $\vec{b}_2 = (-1, 1, 1)$.

6.4. Найти нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости, в которой лежат векторы $\vec{b}_1 = (5, 4, 1)$, $\vec{b}_2 = (1, 1, -2)$.

6.4. Найти нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости, в которой лежат векторы $\vec{b}_1 = (2, 1, -1)$, $\vec{b}_2 = (1, -1, 8)$.

7. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №7

Задание

Найти координаты x_0 , y_0 , z_0 какой-нибудь точки, лежащей в плоскости $3x - 7y + 5z - 2 = 0$.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	2	3
1	В качестве x_0 , y_0 взять два произвольных числа и в уравнении плоскости положить $x = x_0$, $y = y_0$	Пусть $x_0 = 0$, $y_0 = -1$. $3 \cdot 0 - 7 \cdot (-1) + 5z - 2 = 0$, или $5 + 5z = 0$.
2	Из полученного равенства найти $z = z_0$	$5z_0 = -5$, $z_0 = -1$. Итак, $(x_0, y_0, z_0) = (0, -1, -1)$.

Решить самостоятельно следующие задачи

7.1. Найти координаты x_0 , y_0 , z_0 какой-нибудь точки, лежащей в плоскости $x + 16y - z + 3 = 0$.

7.2. Найти координаты x_0 , y_0 , z_0 какой-нибудь точки, лежащей в плоскости $2x + y - 6z + 1 = 0$.

7.3. Найти координаты x_0 , y_0 , z_0 какой-нибудь точки, лежащей в плоскости $x + 3y + z + 4 = 0$.

7.4. Найти координаты x_0, y_0, z_0 какой-нибудь точки, лежащей в плоскости $x - y + 4z - 1 = 0$.

7.5. Найти координаты x_0, y_0, z_0 какой-нибудь точки, лежащей в плоскости $4x + 2y - 6z + 9 = 0$.

8. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №8

Задание

Найти направляющий вектор $\vec{a}$ прямой, заданной как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x - y + 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	2	3
1	Выписать координаты нормальных векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ данных плоскостей	$\vec{n}_1 = (1, 1, -1), \vec{n}_2 = (1, -1, 3)$
2	Найти векторное произведение $[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ и записать его в виде $x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k}$	$[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$, т.е. $x_0 = 2, y_0 = -4, z_0 = -2$
3	Взять $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$	$\vec{a} = (2, -4, -2)$

Решить самостоятельно следующие задачи

8.1. Найти направляющий вектор $\vec{a}$ прямой, заданной как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} x - y - z + 1 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

8.2. Найти направляющий вектор $\vec{a}$ прямой, заданной как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} -x + y + z + 1 = 0, \\ 3x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

8.3. Найти направляющий вектор $\vec{a}$ прямой, заданной как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} x + y + 5 = 0, \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

8.4. Найти направляющий вектор $\vec{a}$ прямой, заданной как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} x - y - z + 2 = 0, \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

конеч. ур.
эф 16-18
нов. ур.
эф 15-14

8.5. Найти направляющий вектор $\vec{a}$ прямой, заданной как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} x + 4y - 2 = 0, \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$$

9. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №9

Задание

Найти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пересечения плоскости $10x + y - 6z = 0$ и прямой

$$\begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = 1 - 3\lambda, \\ z = -4 + \lambda. \end{cases}$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	2	3
1	Решить совместно уравнения плоскости и прямой: $A(x_1 + l\lambda) + B(y_1 + m\lambda) + C(z_1 + n\lambda) + D = 0$, и найти значение $\lambda = \lambda_0$, соответствующее точке пересечения M_0	$10 \cdot 2\lambda + 1 - 3\lambda - 6(-4 + \lambda) = 0$ $\lambda = \lambda_0 = -\frac{25}{11}$
2	Найти $x_0 = x_1 + l\lambda$, $y_0 = y_1 + m\lambda$, $z_0 = z_1 + n\lambda$ из уравнения прямой	$x_0 = 2 \cdot (-\frac{25}{11}) = -\frac{50}{11}$ $y_0 = 1 - 3 \cdot (-\frac{25}{11}) = 7\frac{9}{11}$ $z_0 = -4 - \frac{25}{11} = -4\frac{25}{11}$ $M_0 = (-\frac{50}{11}, 7\frac{9}{11}, -4\frac{25}{11})$

Решить самостоятельно следующие задачи

9.1. Найти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пересечения плоскости $x + y - z = 0$ и прямой

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2 + \lambda, \\ z = -1 + 3\lambda. \end{cases}$$

9.2. Найти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пересечения плоскости $2x + 3y + 4z = 0$ и прямой

$$\begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = 1, \\ z = 1 + \lambda. \end{cases}$$

9.3. Найти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пересечения плоскости $4x + y - 5z = 0$ и прямой

$$\begin{cases} x = -1 - 3\lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 6. \end{cases}$$

9.4. Найти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пересечения плоскости $x + y - 2z - 1 = 0$ и прямой

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda, \\ y = 3\lambda, \\ z = -1 + 8\lambda. \end{cases}$$

9.5. Найти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ пересечения плоскости $x + 14y + z + 2 = 0$ и прямой

$$\begin{cases} x = -1 - \lambda, \\ y = -2 + 3\lambda, \\ z = 8 + 4\lambda. \end{cases}$$

10. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №10

Задание

Найти направляющую цилиндра $x^2 = 6pz$. Какой из координатных осей параллельны образующие этого цилиндра?

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	2	3
1	Уравнение направляющей (в одной из координатных плоскостей) совпадает с уравнением цилиндра	$x^2 = 6pz$ - направляющая цилиндра в плоскости Oxz
2	Образующие параллельны той координатной оси, "название" которой в уравнении цилиндра отсутствует	В уравнении отсутствует y . Значит, образующие параллельны оси Oy .

Решить самостоятельно следующие задачи

10.1. Найти направляющую цилиндра $y^2 - z^2 = 1$. Какой из координатных осей параллельны образующие этого цилиндра?

10.2. Найти направляющую цилиндра $x^2 + y^2 = 16$. Какой из координатных осей параллельны образующие этого цилиндра?

10.3. Найти направляющую цилиндра $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Какой из координатных осей параллельны образующие этого цилиндра?

10.4. Найти направляющую цилиндра $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$. Какой из координатных осей параллельны образующие этого цилиндра?

10.5. Найти направляющую цилиндра $-\frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 1$. Какой из координатных осей параллельны образующие этого цилиндра?

11. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №11

Задание

Составить характеристическое уравнение квадратичной формы

$$6x^2 + z^2 - 2xy + 4xz$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	2	3
1	$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$ где $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{32} = a_{23}$ - коэффициенты квадратичной формы при $x^2, y^2, z^2, 2xy, 2xz, 2yz$, соответственно	Поскольку $a_{11} = 6, a_{33} = 1, a_{12} = -1, a_{13} = 2, a_{22} = a_{23} = 0$, характеристическое уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Решить самостоятельно следующие задачи

11.1. Составить характеристическое уравнение квадратичной формы

$$x^2 + 13y^2 - z^2 + 4yz$$

$$\begin{aligned} & 3) -(1-\lambda)(13-\lambda)(1+\lambda) - 4(1-\lambda) = -(1-\lambda)(13+13\lambda-\lambda-\lambda^2+4-\lambda) = \\ & = -(1-\lambda)(-\lambda^2+8\lambda+17) = 0 \quad 2) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 13-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad 1) x^2 + 13y^2 - z^2 + 4yz = 0 \\ & 1) 1-\lambda = 0 \quad \lambda = 1 \\ & 4) \Delta = 64 + 4 \cdot 17 = 132 \quad \lambda_{4/3} = \frac{-8 \pm \sqrt{11}}{-1} = 8 \pm \sqrt{11} \end{aligned}$$

11.2. Составить характеристическое уравнение квадратичной формы

$$y^2 + 4z^2 + 6xy - 8yz$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$-(1-\lambda)(4-\lambda)(3+\lambda) - 12(1-\lambda) = -(1-\lambda)(4+3\lambda-\lambda)$$

11.3. Составить характеристическое уравнение квадратичной формы

$$3x^2 + 4y^2 + 6z^2 - 2xz$$

11.4. Составить характеристическое уравнение квадратичной формы

$$x^2 - 5y^2 - z^2 + xy - 10xz$$

11.5. Составить характеристическое уравнение квадратичной формы

$$x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 3xz$$

12. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №12

Задание

Определить возможный вид каждой из следующих невырожденных поверхностей второго порядка:

1) $x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 4 = 0$,

2) $4x^2 - y + 7z^2 = 0$,

3) $y^2 + z^2 = 9$.

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие данной ситуации предложенному алгоритму
1	2	3
1	Если в уравнение входят x^2, y^2, z^2 и знаки перед ними одинаковые, то поверхность является эллипсоидом	$x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 4 = 0$ - эллипсоид
2	Если две переменные входят во второй степени, а третья - в первой, то поверхность - параболоид	$4x^2 - y + 7z^2 = 0$ - параболоид
3	Если одна из переменных x, y, z (в 1-ой и 2-ой степенях) отсутствует, то поверхность - цилиндрическая (цилиндр)	$y^2 + z^2 = 9$ - цилиндр

Решить самостоятельно следующие задачи

12.1. Определить возможный вид каждой из следующих поверхностей второго порядка:

- 1) $2x^2 + 6y^2 - 7z^2 - 3 = 0$, - эллипсоид гипер.
- 2) $4x - 6y^2 + z^2 = 0$, - гипер. параболоид
- 3) $4x^2 + z^2 = 16$, - эллип. цилиндр.

12.2. Определить возможный вид каждой из следующих поверхностей второго порядка:

- 1) $x^2 - y^2 + z^2 + 25 = 0$, конус
- 2) $-x^2 + 3y + z^2 = 0$,
- 3) $3x^2 - 4y^2 = 10$ гипер. цилиндр

12.3. Определить возможный вид каждой из следующих поверхностей второго порядка:

- 1) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 6 = 0$, эллипсоид
- 2) $x^2 + 5y^2 - z = 0$,
- 3) $4x^2 - y = 0$

12.4. Определить возможный вид каждой из следующих поверхностей второго порядка:

- 1) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 1 = 0$, двуполостный гиперболоид.
- 2) $x^2 - y + 4z^2 = 0$,
- 3) $-x^2 + 12y = 0$

12.5. Определить возможный вид каждой из следующих поверхностей второго порядка:

- 1) $16x^2 - 18y^2 + 7z^2 = 0$, однополостный гиперболоид.
- 2) $-x + 14y^2 + z^2 = 0$, гиперболич. параболоид
- 3) $-x^2 + 6y^2 = 13$ эллиптический цилиндр

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

- 1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты.**

2. Решить самостоятельно следующие задачи

Вариант 1

1. На плоскости найти каноническое уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $x + y + 1 = 0$ и $y = 5x + 2$. Сделать чертеж.

2. Прямая задана уравнением $3x + 7y - 2 = 0$. Перейти к другой форме задания этой прямой: 1) $y = kx + b$, 2) ее параметрическим уравнениям.

3. Найти уравнение ^{прямой} ~~плоскости~~, проходящей через точку $M(3, 4, -5)$ параллельно векторам $\vec{a} = (3, 1, -1)$ и $\vec{b} = (-1, -2, 1)$.

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

$$d_1 \quad \frac{x - 3}{3} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z + 5}{-1}$$

$$d_2 \quad \frac{x - 3}{-1} = \frac{y - 4}{-2} = \frac{z + 5}{1}$$

✓ 4. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 5x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + y = 0 \\ 2x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$2(\lambda + 1) + 3(-1 + 2\lambda) + 6\lambda - 1 = 0$$

$$2\lambda + 2 - 3 + 6\lambda + 6\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \quad 14\lambda - 2 = 0$$

$$x_0 = \frac{1}{7} + 1 = \frac{8}{7}; \quad y_0 = -1 + \frac{2}{7} = -\frac{5}{7}; \quad z_0 = -\frac{6}{7}.$$

✓ 5. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$.

6. Привести к каноническому виду квадратичную форму $3x^2 + y^2 - z^2 + 6xy$.

7. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка $3x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - 4 = 0$. Определить вид этой поверхности.

Вариант 2

1. На плоскости найти каноническое уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2(x - 1) + 3(y + 5) = 0$ и $x + y - 7 = 0$. Сделать чертеж.

2. Прямая задана уравнением $\frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{3}$. Перейти к другой форме задания этой прямой: 1) ее общему уравнению, 2) $y = kx + b$.

3. Точка $M(2, -1, 1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Найти уравнение этой плоскости.

4. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

5. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ и плоскости $3x + 5y - z - 2 = 0$.

6. Привести к каноническому виду квадратичную форму $2x^2 + y^2 + 3z^2 - 4yz$

7. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка $2x^2 + y^2 + 3z^2 - 4yz + 1 = 0$. Определить вид этой поверхности.

Вариант 3

1. На плоскости найти уравнение прямой в виде $y = kx + b$, если известно, что прямая проходит через точку $(-1, 3)$ и точку (x_0, y_0) (с $x_0 > 0$) пересечения парабол $y = x^2$ и $x = y^2$. Сделать чертеж.

2. Прямая задана уравнением $x + 11y - 16 = 0$. Перейти к другой форме задания этой прямой: 1) ее каноническому уравнению, 2) ее уравнению по точке и угловому коэффициенту.

3. Даны две точки $M_1(3, -1, 2)$ и $M_2(4, -2, -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

(4.) Найти канонические уравнения прямой

$$\frac{x-x_1}{c} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \quad \begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y-4=0 \\ 3x+2y-4=0 \end{cases}$$

еще $M(x_1, y_1, z_1)$ может быть найдено на пересечении прямой l и α (l, m, n) — напр. вектор.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8$$

$$y = \frac{-16}{-8} = 2$$

$$\begin{aligned} x-2y-4 &= 0 \Rightarrow x = 2y+4 \\ 3x+2y-4 &= 0 \\ 3(2y+4)+2y-4 &= 0 \\ 6y+12+2y-4 &= 0 \\ 8y+8 &= 0 \\ 8y &= -8 \\ y &= -1 \\ x &= 2(-1)+4 = 2 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 - (-6) = 7$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-8) = 10$$

(5.) Найти точку пересечения прямой $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$ и плоскости

$x+2y-2z+6=0$. Перейдем от канонических уравнений прямой к параметрическим.

$$x+2 = -2\lambda, \quad y-1 = 3\lambda, \quad z-3 = 2\lambda \quad \text{где } \lambda \text{ — число}$$

$$\begin{aligned} x+2 &= -2\lambda \Rightarrow x = -2\lambda-2 \\ y-1 &= 3\lambda \Rightarrow y = 3\lambda+1 \\ z-3 &= 2\lambda \Rightarrow z = 2\lambda+3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2(-2\lambda-2) - 2(2\lambda+3) + 6 &= 0 \\ 1 - 4\lambda - 4 - 4\lambda - 6 + 6 &= 0 \\ -8\lambda - 3 &= 0 \\ -8\lambda &= 3 \\ \lambda &= -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$x = -2(-\frac{3}{8}) - 2 = \frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4}$$

(6.) Привести к каноническому виду квадратичную форму $6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz$.

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 64$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$\begin{aligned} (6-\lambda)(-1-\lambda) - 4 &= 0 \\ (6-\lambda)(-1-\lambda) - 4 &= 0 \\ (6-\lambda)(-1-\lambda) - 4 &= 0 \\ (6-\lambda)(-1-\lambda) - 4 &= 0 \end{aligned}$$

7. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка

$$6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz = 32 = 0. \text{ Определить вид этой поверхности.}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 64$$

$$12 + 0 - 8 = 4$$

Вариант 4

1. На плоскости найти уравнение прямой по точке и нормальному вектору, если известно, что прямая проходит через точку $(1, 0)$ и точку (x_0, y_0) (с $y_0 > 0$) пересечения прямой $y = x + 20$ с параболой $x = -y^2$. Сделать чертеж.

2. Прямая задана уравнением $2(x - 1) + 3(y + 5) = 0$. Перейти к другой форме задания этой прямой: 1) ее общему уравнению, 2) ее каноническому уравнению.

3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2, -1, 3)$ и $M_2(3, 1, 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = (3, -1, 4)$.

4. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0 \\ 2x - y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

5. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{9}$ и плоскости $3x - 3y + 2z - 5 = 0$.

6. Привести к каноническому виду квадратичную форму $4x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 2yz$

7. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка $4x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy - 2yz - 4 = 0$. Определить вид этой поверхности.

Вариант 5

На плоскости найти общее уравнение прямой, проходящей через точку $(0, 1)$ и точку (x_0, y_0) (с $x_0 < 0$) пересечения прямой $y = 2x + 3$ с параболой $y = x^2$. Сделать чертеж.

2. Прямая задана уравнениями

$$\begin{cases} x = 5 - 3\lambda, \\ y = 1 + 4\lambda. \end{cases}$$

Перейти к другой форме задания этой прямой: 1) по точке и нормальному вектору, 2) ее общему уравнению.

3. Найти уравнение плоскости, которая проходит через ось Ox и точку $M_1(4, -1, 2)$.

4. Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} x - 2y + z + 6 = 0 \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$$

,

5. Найти точку пересечения прямой $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$ и плоскости $x - 2y + z - 15 = 0$.

6. Привести к каноническому виду квадратичную форму $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xz - 2xy$.

7. Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xz - 2xy - 36 = 0$. Определить вид этой поверхности.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЮНИТА 1

Редактор Л.С. Лебедева

Оператор компьютерной верстки А.С. Поляков

о

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998

Сдано в печать 26.11.2001 г.

НОУ "Современный Гуманитарный Институт"

Тираж 27000.

Заказ 4163.

Современный Гуманитарный Университет

Отпечатано в Коломенской типографии. 140400, Московская обл., г. Коломна, ул. III Интернационала, д. 2 а.

